ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧ/ΚΩΝ & ΜΗΧ/ΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

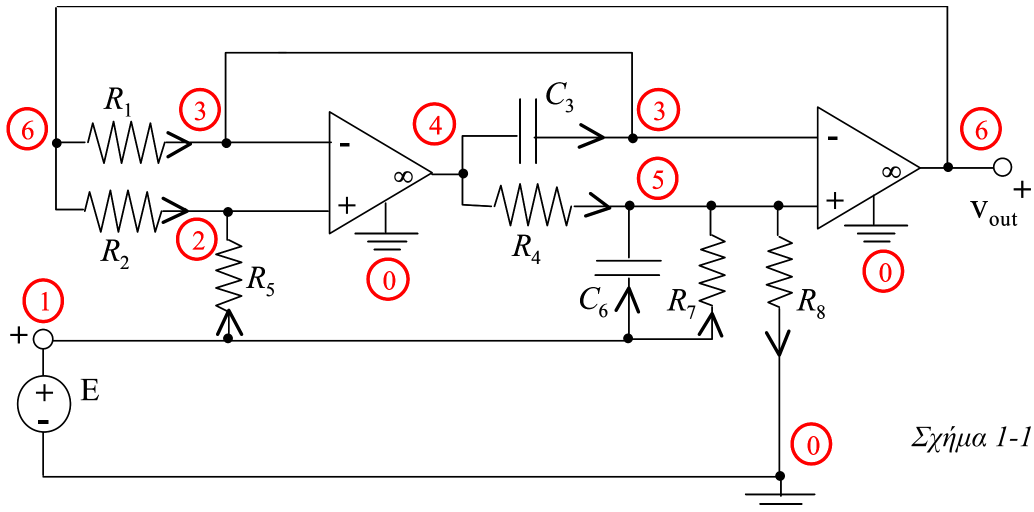
Μάθημα: "ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΚΤΥΩΝ" (5^o εξάμηνο)

Ακαδ. Έτος: 2004-2005

Διδάσκοντες: Τ. Κουσιουρής, Ν. Μαράτος, Κ. Τζαφέστας

Λύση 1^{ου} Θέματος Κανονικής Εξέτασης (15 Φεβρουαρίου 2005)

ΘΕΜΑ 1^o (40%) **(ομάδα Α)**



Σχήμα 1-1

Για το κύκλωμα του παραπάνω Σχήματος 1:

α. (10%) Να γραφούν οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων με δύο γράφους.

β. (10%) Να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=V_{out}(s)/E(s)$.

γ. (5%) Να ευρεθεί η σχέση την οποία πρέπει να ικανοποιούν οι αντιστάσεις του κυκλώματος, ώστε η συνάρτηση πλάτους να δύναται να μηδενιστεί για πεπερασμένη κυκλική συχνότητα ω.

δ. (5%) Θέτουμε R_1=1ΚΩ, $C_3=C_6$=1μF, και έστω επιπλέον ότι $R_2=R_5$ και $R_7=R_8$. Θεωρούμε ότι το κύκλωμα διεγείρεται στην είσοδο από ημιτονοειδές σήμα τάσης $E(t)=|A|\cdot\sin(1000\cdot t)$, και μεταβάλλουμε την αντίσταση R_4 παρατηρώντας στην έξοδο το σήμα τάσης $v_{out}^{HMK}(t)$ (στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση). Να προσδιοριστεί η τιμή της αντίστασης R_4 για την οποία το σήμα στην έξοδο μηδενίζεται.

ε. Έστω και πάλι R_1= 1ΚΩ και $C_3= C_6$=1μF. Θέτουμε επίσης $R_2=R_5$=1ΚΩ και R_4=(1/3)ΚΩ.

ε1. (5%) Να σχεδιαστεί το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους, εαν θέσουμε $R_7=R_8$=500Ω, και να χαρακτηριστεί η λειτουργία του κυκλώματος ως φίλτρου.

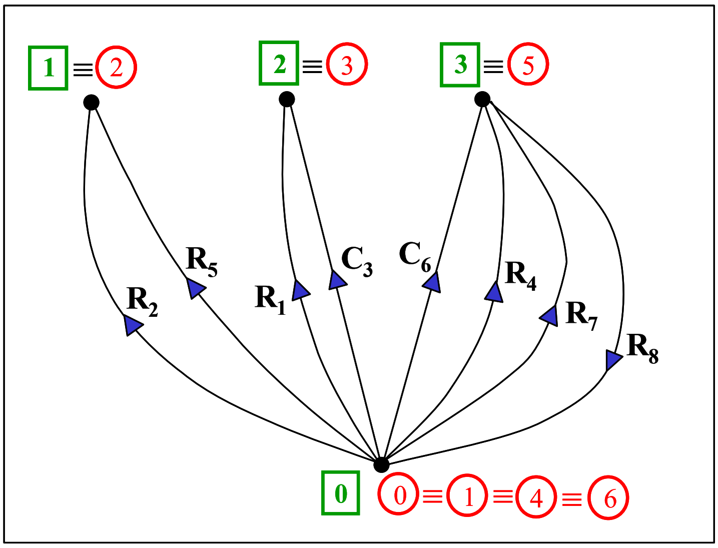
ε2. (5%) Έστω γενικότερα $R_7=R_8=R$. Να ευρεθεί η συνθήκη την οποία πρέπει να ικανοποιεί γενικά η R, ώστε το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους να έχει τη μορφή του προηγούμενου ερωτήματος (ε1).

ΛΥΣΗ

α. (10%) Η αρίθμηση των κόμβων και οι φορές αναφοράς των κλάδων σημειώνονται στο σχήμα του θέματος (Σχήμα 1-1).
(Προσοχή! στα βραχυκυκλώματα ανάδρασης, κοινοί κόμβοι 3 και 6).

Για το **Ι-Γράφο** έχουμε τις ακόλουθες απλοποιήσεις κόμβων/κλάδων:
Τελεστικός ενισχυτής 1: **4**≡**0**, ενώ οι κόμβοι **2** και **3** παραμένουν διαχωρισμένοι.
Τελεστικός ενισχυτής 2: **6**≡**0**, ενώ οι κόμβοι **5** και **3** παραμένουν διαχωρισμένοι.
Πηγή Τάσης Ε: **1**≡**0**.

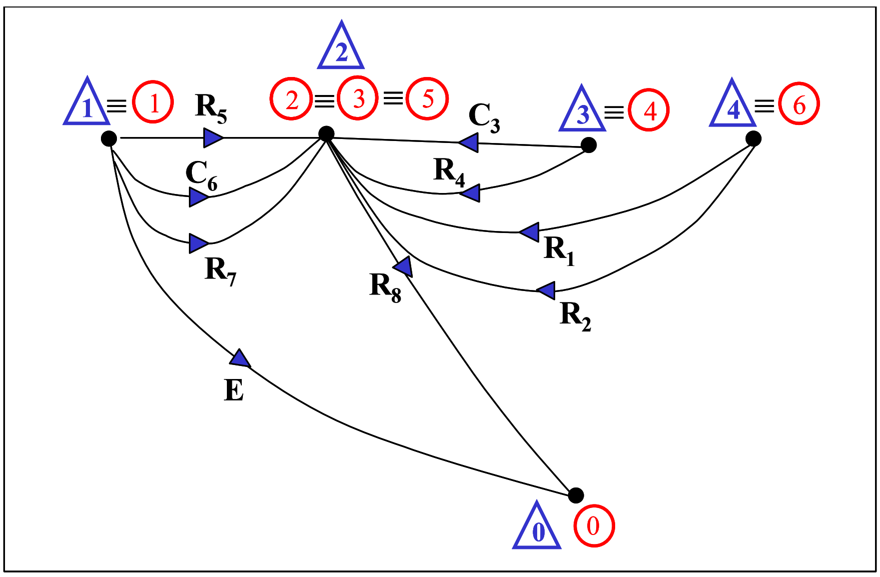
Άρα στο Ι-γράφο έχουμε: **0**≡**1**≡**4**≡**6**.
Ο Ι-γράφος εικονίζεται στο ακόλουθο Σχήμα (ακολουθώντας τις φορές αναφοράς που έχουν σημειωθεί στο Σχήμα 1-1 του Θέματος):



<u>Ι-γράφος</u>

Για το **V-Γράφο** έχουμε τις ακόλουθες απλοποιήσεις κόμβων/κλάδων:
Τελεστικός ενισχυτής 1: **2**≡**3**, ενώ οι κόμβοι **4** και **0** παραμένουν διαχωρισμένοι.
Τελεστικός ενισχυτής 2: **5**≡**3**, ενώ οι κόμβοι **6** και **0** παραμένουν διαχωρισμένοι.

Άρα στο V-γράφο έχουμε: **2**≡**3**≡**5**.
Ο V-γράφος εικονίζεται στο ακόλουθο Σχήμα (ακολουθώντας και πάλι τις ίδιες φορές αναφοράς που έχουν σημειωθεί στο Σχήμα 1 του θέματος):



<u>V-γράφος</u>

Οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων με δύο γράφους θα είναι επομένως, σε μητρική μορφή, κατά τα γνωστά:

$$\begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ E \end{array}
\underbrace{\begin{array}{cccc} \triangle 1 & \triangle 2 & \triangle 3 & \triangle 4 \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} -G_5 & G_2+G_5 & 0 & -G_2 \\ 0 & G_1+sC_3 & -sC_3 & -G_1 \\ -sC_6-G_7 & G_4+sC_6+G_7+G_8 & -G_4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}}_{\mathbf{P}(s)}
\underbrace{\begin{pmatrix} e_{\triangle 1} \\ e_{\triangle 2} \\ e_{\triangle 3} \\ e_{\triangle 4} \end{pmatrix}}_{\underline{e}(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}}_{\underline{u}(s)} \tag{1.1}$$

β. (10%) Η παρατηρούμενη έξοδος του κυκλώματος είναι:

$$V_{out} = e_{⑥} = e_{\triangle 4}$$

και, άρα, για τη ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=V_{out}(s)/E(s)$ έχουμε (κανόνας Kramer για επίλυση γραμμικών συστημάτων):

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{E(s)} = \frac{e_{⑥}(s)}{E(s)} = \frac{e_{\triangle 4}(s)}{E(s)} = \frac{\Delta_4(s)}{E(s)\cdot\Delta(s)} \tag{1.2}$$

Οι ορίζουσες $\Delta_4(s)$ και $\Delta(s)$ είναι:

$$\begin{aligned}
\Delta_4 &= \begin{vmatrix} -G_5 & G_2+G_5 & 0 & 0 \\ 0 & G_1+sC_3 & -sC_3 & 0 \\ -sC_6-G_7 & G_4+sC_6+G_7+G_8 & -G_4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & E \end{vmatrix} = E\cdot\begin{vmatrix} -G_5 & G_2+G_5 & 0 \\ 0 & G_1+sC_3 & -sC_3 \\ -sC_6-G_7 & G_4+sC_6+G_7+G_8 & -G_4 \end{vmatrix} = \\
&= E\cdot\left((-G_5)\begin{vmatrix} G_1+sC_3 & -sC_3 \\ G_4+sC_6+G_7+G_8 & -G_4 \end{vmatrix} - (G_2+G_5)\begin{vmatrix} 0 & -sC_3 \\ -sC_6-G_7 & -G_4 \end{vmatrix}\right) = \\
&= E\cdot\left[G_4G_5(G_1+s\cancel{C_3}) - sC_3G_5(\cancel{G_4}+s\cancel{C_6}+\cancel{G_7}+G_8) + sC_3(G_2+\cancel{G_5})(sC_6+G_7)\right] = \\
&= E\cdot\left[G_1G_4G_5 - sC_3G_5G_8 + sC_3G_2(sC_6+G_7)\right] = \\
&= E\cdot\left[s^2(G_2C_3C_6) + sC_3(G_2G_7 - G_5G_8) + G_1G_4G_5\right]
\end{aligned} \tag{1.3}$$

και

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} -G_5 & G_2+G_5 & 0 & -G_2 \\ 0 & G_1+sC_3 & -sC_3 & -G_1 \\ -sC_6-G_7 & G_4+sC_6+G_7+G_8 & -G_4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} G_2+G_5 & 0 & -G_2 \\ G_1+sC_3 & -sC_3 & -G_1 \\ G_4+sC_6+G_7+G_8 & -G_4 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= (-1)\cdot\left((G_2+G_5)\begin{vmatrix} -sC_3 & -G_1 \\ -G_4 & 0 \end{vmatrix} + (-G_2)\begin{vmatrix} G_1+sC_3 & -sC_3 \\ G_4+sC_6+G_7+G_8 & -G_4 \end{vmatrix}\right) = \\
&= (-1)\cdot\left(-G_1G_4(\cancel{G_2}+G_5) + G_2G_4(\cancel{G_1}+s\cancel{C_3}) - sC_3G_2(\cancel{G_4}+sC_6+G_7+G_8)\right) = \\
&= G_1G_4G_5 + sC_3G_2(sC_6+G_7+G_8) = s^2G_2C_3C_6 + sC_3G_2(G_7+G_8) + G_1G_4G_5
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1.2)-(1.4):

$$\boxed{G(s)=\frac{s^2\left(G_2C_3C_6\right)+sC_3\left(G_2G_7-G_5G_8\right)+G_1G_4G_5}{s^2\left(G_2C_3C_6\right)+sC_3G_2\left(G_7+G_8\right)+G_1G_4G_5}} \qquad (1.5)$$

(γ) (5%) Από τον παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς (1.5) (χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\psi(s) = s^2(G_2C_3C_6) + sG_2C_3(G_7+G_8)+ G_1G_4G_5$) προκύπτει ότι το δίκτυο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (για θετικές αγωγιμότητες και χωρητικότητες), και επομένως ορίζεται η αρμονική απόκριση (απόκριση στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση) αυτού.

Η συνάρτηση πλάτους ορίζεται ως:

$$\left|G(j\omega)\right|=\left|\frac{(j\omega)^2\left(G_2C_3C_6\right)+(j\omega)C_3\left(G_2G_7-G_5G_8\right)+G_1G_4G_5}{(j\omega)^2\left(G_2C_3C_6\right)+(j\omega)C_3G_2\left(G_7+G_8\right)+G_1G_4G_5}\right|$$

και για να δύναται να μηδενιστεί για πεπερασμένη κυκλική συχνότητα (έστω $\omega_0<\infty$) θα πρέπει ο αριθμητής να μηδενίζεται για $\omega=\omega_0$, δηλαδή:

$$\left|(j\omega_0)^2\left(G_2C_3C_6\right)+(j\omega_0)C_3\left(G_2G_7-G_5G_8\right)+G_1G_4G_5\right|=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|\left[\left(G_1G_4G_5\right)-\omega_0^{\,2}\left(G_2C_3C_6\right)\right]+j\left[\omega_0C_3\left(G_2G_7-G_5G_8\right)\right]\right|=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(G_1G_4G_5\right)-\omega_0^{\,2}\left(G_2C_3C_6\right)=0\\ \text{και}\\ \omega_0C_3\left(G_2G_7-G_5G_8\right)=0\end{array}\right\} \underset{G_2C_3C_6>0}{\overset{G_1G_4G_5>0}{\Leftrightarrow}} \left\{\begin{array}{ll}\omega_0^{\,2}=\left(G_1G_4G_5\right)/\left(G_2C_3C_6\right) & (1.6\alpha)\\ \text{και} & \\ G_2G_7=G_5G_8 & (1.6\beta)\end{array}\right.$$

Η παραπάνω σχέση (1.6β) είναι η ζητούμενη.

(δ) (5%) Για την απόκριση ενός κυκλώματος στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση (ΗΜΚ) γνωρίζουμε ότι, για κάθε συχνότητα ω_0 ημιτονοειδούς σήματος εισόδου, το πλάτος του ημιτονοειδούς σήματος απόκρισης στην έξοδο (στην ΗΜΚ) ισούται με την τιμή της *συνάρτησης πλάτους* $|G(j\omega_0)|$ επί το πλάτος του σήματος εισόδου. Για να μηδενίζεται επομένως το σήμα στην έξοδο αρκεί να μηδενίζεται η τιμή της συνάρτησης πλάτους για $\omega=\omega_0$.

Από τα δεδομένα του ερωτήματος ($R_2=R_5$ και $R_7=R_8$) προκύπτει ότι σχέση (1.6β) του προηγούμενου ερωτήματος (γ) ισχύει. Επομένως, για δεδομένη συχνότητα ω_0 ενός ημιτονοειδούς σήματος στην είσοδο, το πλάτος του σήματος στην έξοδο (στην ΗΜΚ) μηδενίζεται όταν επιπλέον ισχύει και η παραπάνω σχέση (1.6α), απ'όπου προκύπτει η ζητούμενη τιμή για την αντίσταση R_4.

Στην περίπτωσή μας έχουμε για το σήμα στην είσοδο: ω_0=1000 rad/sec, και επομένως από τη σχέση (1.6α) παίρνουμε:

$\left(1000\right)^2=\left(10^{-3}G_4\right)/\left(10^{-6}10^{-6}\right) \Leftrightarrow G_4=10^{-3}$, δηλαδή R_4=1KΩ

(ε1) (5%) Για τα δεδομένα του ερωτήματος η συνάρτηση μεταφοράς (1.5) γίνεται:

$$G(s)=\frac{s^2\left(10^{-15}\right)+3\cdot10^{-9}}{s^2\left(10^{-15}\right)+s\,10^{-6}10^{-3}\left(2+2\right)\cdot10^{-3}+3\cdot10^{-9}}=\frac{s^2+3\cdot10^6}{s^2+\left(4\cdot10^3\right)s+3\cdot10^6}$$

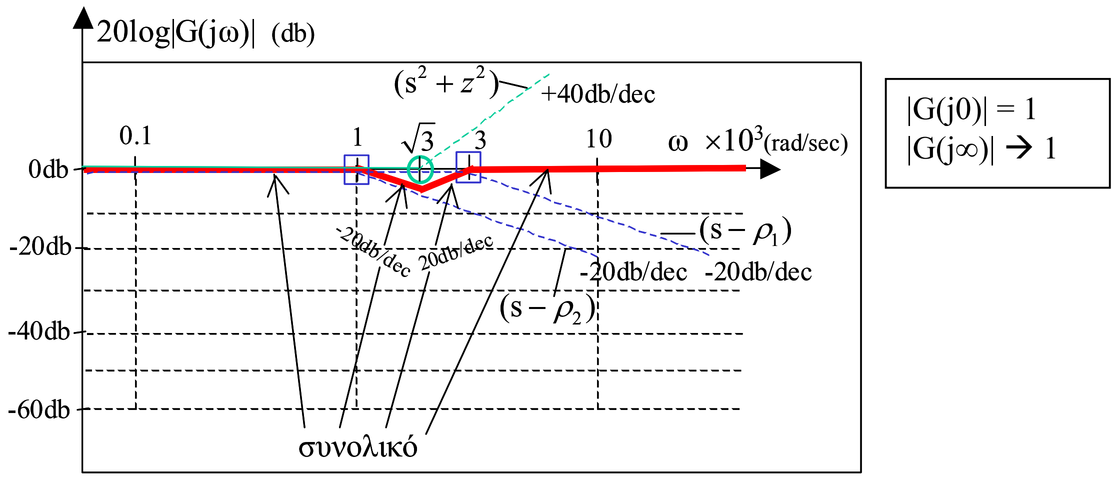
Έχουμε επομένως δύο μηδενικά στο φανταστικό άξονα: $z_{1,2} = \pm j z = \pm j\sqrt{3}\cdot 10^3$,
και δύο πραγματικούς (στην περίπτωση αυτή) πόλους:

$$\rho_1 = -2\cdot 10^3 - \sqrt{4\cdot 10^6 - 3\cdot 10^6} = -3\cdot 10^3$$

και

$$\rho_2 = -2\cdot 10^3 + \sqrt{4\cdot 10^6 - 3\cdot 10^6} = -10^3$$

Το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους έχει επομένως την ακόλουθη μορφή:



Το κύκλωμα λειτουργεί επομένως ως "ζωνοφρακτικό φίλτρο" (φίλτρο αποκοπής ζώνης, με κεντρική συχνότητα αποκοπής $\omega_n = \sqrt{3}\cdot 10^3$ rad/sec).

(ε2) (5%) Στην γενική περίπτωση όπου $R_7=R_8=R$, ή $G_7=G_8=G$, η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται:

$$G(s) = \frac{s^2 + 3\cdot 10^6}{s^2 + \left(2\cdot G\cdot 10^6\right)s + 3\cdot 10^6}$$

Για να έχει το διάγραμμα Bode την παραπάνω μορφή πρέπει να έχουμε δύο πραγματικούς πόλους όπως στο προηγούμενο ερώτημα, δηλαδή πρέπει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \left(G\cdot 10^6\right)^2 - 3\cdot 10^6 > 0 \Leftrightarrow G^2 > 3\cdot 10^{-6} \Leftrightarrow G > \sqrt{3}\cdot 10^{-3} \text{ ή } R < \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{K\Omega}$$