ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧ/ΚΩΝ & ΜΗΧ/ΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

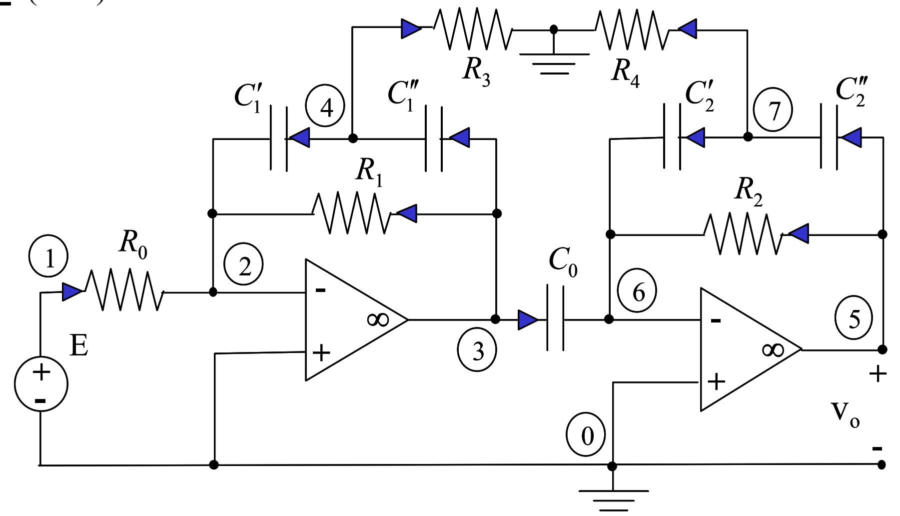
Μάθημα: "ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΚΤΥΩΝ" (5ο εξάμηνο)

Ακαδ. Έτος: 2002-2003

Διδάσκοντες: Τ. Κουσιουρής, Ν. Μαράτος, Κ. Τζαφέστας

Λύσεις Θεμάτων Εξέτασης (Φεβρουαρίου 2003) (ομάδα Α)

Θέμα 1 (35%)



Σχήμα 1

Για το κύκλωμα του παραπάνω Σχήματος 1:

(α) (5%) Να γραφούν οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων με δύο γράφους.

(β) (10%) Να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς: $G(s) = V_o(s)/E(s)$

(γ) (10%) Εάν $C_1' = C_1'' = C_2' = C_2'' = 1$ F, $R_3 = 3$ Ω, $C_0 = 10$ F, $R_0 = 1$ Ω, και $R_4 = 1$ Ω, να εξετασθεί η ευστάθεια του συστήματος συναρτήσει των R_1, R_2.

(δ) (10%) Για τις ανωτέρω τιμές των στοιχείων:

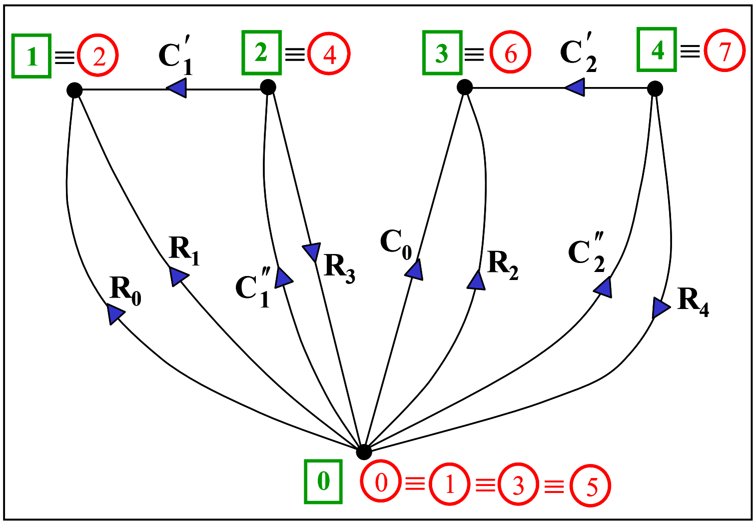
- **(i)** Να σχεδιασθεί το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους, με R_2=2Ω και R_1=20Ω.
- **(ii)** Να εκφρασθεί η συνθήκη για να είναι τα μέγιστα του ασυμπτωτικού διαγράμματος Bode ίσα, εφόσον διατηρείται η διάταξη πόλων - μηδενικών.

Λύση

(α) Στο **Ι-Γράφο** έχουμε τις ακόλουθες απλοποιήσεις κόμβων/κλάδων:

Τελεστικός ενισχυτής 1: **3≡0**, ενώ οι κόμβοι **2** και **0** παραμένουν διαχωρισμένοι.
Τελεστικός ενισχυτής 2: **5≡0**, ενώ οι κόμβοι **6** και **0** παραμένουν διαχωρισμένοι.
Πηγή Τάσης Ε: **1≡0**.

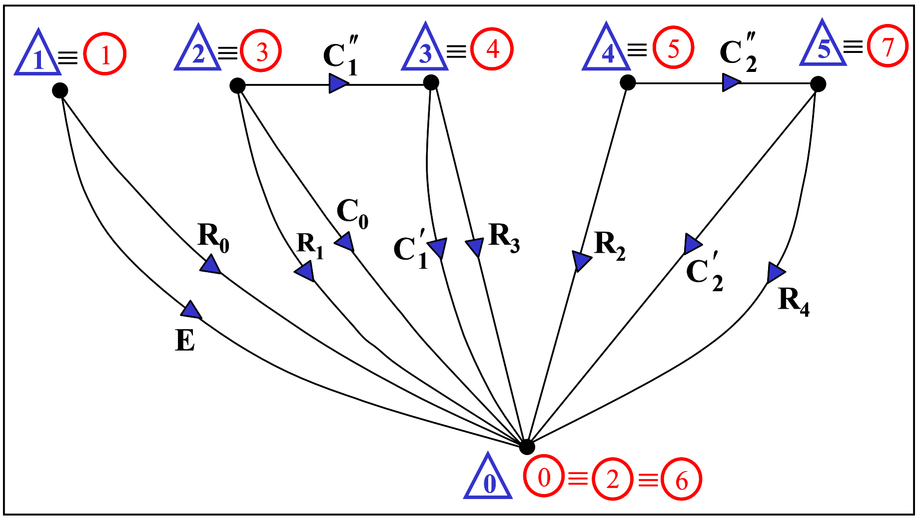
Άρα στο Ι-γράφο έχουμε: **0≡1≡3≡5**.
Ο Ι-γράφος εικονίζεται στο ακόλουθο Σχήμα (ακολουθώντας τις φορές αναφοράς που έχουν σημειωθεί στο Σχήμα 1 του Θέματος):



<u>I-γράφος</u>

Για το **V-Γράφο** έχουμε τις ακόλουθες απλοποιήσεις κόμβων/κλάδων:
Τελεστικός ενισχυτής 1: **2≡0**, ενώ οι κόμβοι **3** και **0** παραμένουν διαχωρισμένοι.
Τελεστικός ενισχυτής 2: **6≡0**, ενώ οι κόμβοι **5** και **0** παραμένουν διαχωρισμένοι.
Πηγή Τάσης Ε: ο κλάδος από τον κόμβο **1** στον **0** παραμένει.

Άρα στο V-γράφο έχουμε: **0≡2≡6**.
Ο V-γράφος εικονίζεται στο ακόλουθο Σχήμα (ακολουθώντας και πάλι τις ίδιες φορές αναφοράς που έχουν σημειωθεί στο Σχήμα 1 του θέματος):



<u>V-γράφος</u>

Οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων με δύο γράφους θα είναι επομένως κατά τα γνωστά:

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\boxed{1} & : & -(sC'_1)\, e_{\triangle 3} - G_0\, e_{\triangle 1} - G_1\, e_{\triangle 2} = 0 \\[1em]
\boxed{2} & : & (sC'_1)\, e_{\triangle 3} - (sC''_1)\left[e_{\triangle 2} - e_{\triangle 3}\right] + G_3\, e_{\triangle 3} = 0 \\[1em]
\boxed{3} & : & -G_2\, e_{\triangle 4} - (sC_0)\, e_{\triangle 2} - (sC'_2)\, e_{\triangle 5} = 0 \\[1em]
\boxed{4} & : & (sC'_2)\, e_{\triangle 5} - (sC''_2)\left[e_{\triangle 4} - e_{\triangle 5}\right] + G_4\, e_{\triangle 5} = 0 \\[1em]
E & : & e_{\triangle 1} = E
\end{array}
\right\}
$$

και σε μητρική μορφή:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c|ccccc}
 & \triangle 1 & \triangle 2 & \triangle 3 & \triangle 4 & \triangle 5 \\
\end{array}
\\
\begin{array}{c}
\boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ E
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix}
-G_0 & -G_1 & -sC'_1 & 0 & 0 \\
0 & -sC''_1 & (G_3 + sC'_1 + sC''_1) & 0 & 0 \\
0 & -sC_0 & 0 & -G_2 & -sC'_2 \\
0 & 0 & 0 & -sC''_2 & (G_4 + sC'_2 + sC''_2) \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}}_{\mathbf{P}(s)}
\underbrace{\begin{bmatrix}
e_{\triangle 1} \\ e_{\triangle 2} \\ e_{\triangle 3} \\ e_{\triangle 4} \\ e_{\triangle 5}
\end{bmatrix}}_{\underline{\boldsymbol{e}}(s)}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E
\end{bmatrix}}_{\underline{\boldsymbol{u}}(s)}
\end{array}
\qquad \textbf{(1-1)}
$$

(β) Έχουμε για τη ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς:

$$
\boxed{G(s) = \frac{V_0(s)}{E(s)} = \frac{e_{5}(s)}{E(s)} = \frac{e_{\triangle 4}(s)}{E(s)} = \frac{\Delta_4(s)}{E(s)\,\Delta(s)}}
\qquad \textbf{(1-2)}
$$

όπου:

$$
\Delta(s) = \det(\mathbf{P}(s)) =
\begin{vmatrix}
-G_0 & -G_1 & -sC'_1 & 0 & 0 \\
0 & -sC''_1 & (G_3 + sC'_1 + sC''_1) & 0 & 0 \\
0 & -sC_0 & 0 & -G_2 & -sC'_2 \\
0 & 0 & 0 & -sC''_2 & (G_4 + sC'_2 + sC''_2) \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

και

$$
\Delta_4(s) =
\begin{vmatrix}
-G_0 & -G_1 & -sC'_1 & 0 & 0 \\
0 & -sC''_1 & (G_3 + sC'_1 + sC''_1) & 0 & 0 \\
0 & -sC_0 & 0 & 0 & -sC'_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & (G_4 + sC'_2 + sC''_2) \\
1 & 0 & 0 & E & 0
\end{vmatrix}
$$

Έχουμε για την ορίζουσα $\Delta(s)$, αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της $5^{ης}$ και εν συνεχεία της $4^{ης}$ γραμμής:

$$\Rightarrow \quad \Delta(s)=(-1)^{5+1}\begin{vmatrix} -G_1 & -sC_1' & 0 & 0 \\ -sC_1'' & (G_3+sC_1'+sC_1'') & 0 & 0 \\ -sC_0 & 0 & -G_2 & -sC_2' \\ 0 & 0 & -sC_2'' & (G_4+sC_2'+sC_2'') \end{vmatrix}=$$

$$=\left(G_4+sC_2'+sC_2''\right)\begin{vmatrix} -G_1 & -sC_1' & 0 \\ -sC_1'' & (G_3+sC_1'+sC_1'') & 0 \\ -sC_0 & 0 & -G_2 \end{vmatrix}+\left(sC_2''\right)\begin{vmatrix} -G_1 & -sC_1' & 0 \\ -sC_1'' & (G_3+sC_1'+sC_1'') & 0 \\ -sC_0 & 0 & -sC_2' \end{vmatrix}=$$

$$=-G_2\left(G_4+sC_2'+sC_2''\right)\begin{vmatrix} -G_1 & -sC_1' \\ -sC_1'' & (G_3+sC_1'+sC_1'') \end{vmatrix}-\left(sC_2'\right)\left(sC_2''\right)\begin{vmatrix} -G_1 & -sC_1' \\ -sC_1'' & (G_3+sC_1'+sC_1'') \end{vmatrix}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο $\begin{vmatrix} -G_1 & -sC_1' \\ -sC_1'' & (G_3+sC_1'+sC_1'') \end{vmatrix}$, παίρνουμε επομένως:

$\Delta(s)=\left[-G_1\left(G_3+sC_1'+sC_1''\right)-\left(sC_1'\right)\left(sC_1''\right)\right]\left[-G_2\left(G_4+sC_2'+sC_2''\right)-\left(sC_2'\right)\left(sC_2''\right)\right]$, ή ισοδύναμα

$$\boxed{\Delta(s)=\left[\left(C_1'C_1''\right)s^2+G_1\left(C_1'+C_1''\right)s+G_1G_3\right]\left[\left(C_2'C_2''\right)s^2+G_2\left(C_2'+C_2''\right)s+G_2G_4\right]} \qquad \textbf{(1-3)}$$

⇒ Για την ορίζουσα Δ_4 έχουμε αντίστοιχα:

$$\Delta_4(s)=(-1)^{5+4}\cdot E\cdot\begin{vmatrix} -G_0 & -G_1 & -sC_1' & 0 \\ 0 & -sC_1'' & (G_3+sC_1'+sC_1'') & 0 \\ 0 & -sC_0 & 0 & -sC_2' \\ 0 & 0 & 0 & (G_4+sC_2'+sC_2'') \end{vmatrix}=$$

$$=E\cdot G_0\cdot\begin{vmatrix} -sC_1'' & (G_3+sC_1'+sC_1'') & 0 \\ -sC_0 & 0 & -sC_2' \\ 0 & 0 & (G_4+sC_2'+sC_2'') \end{vmatrix}=$$

$$=E\cdot G_0\cdot\left(G_4+sC_2'+sC_2''\right)\cdot\begin{vmatrix} -sC_1'' & (G_3+sC_1'+sC_1'') \\ -sC_0 & 0 \end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta_4=E\cdot G_0\cdot\left(sC_0\right)\cdot\left[G_4+s\left(C_2'+C_2''\right)\right]\cdot\left[G_3+s\left(C_1'+C_1''\right)\right]} \qquad \textbf{(1-4)}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1-2), (1-3) και (1-4), παίρνουμε για τη συνάρτηση μεταφοράς G(s):

$$\boxed{G(s)=\frac{\left(G_0C_0\right)s\cdot\left[G_4+s\left(C_2'+C_2''\right)\right]\cdot\left[G_3+s\left(C_1'+C_1''\right)\right]}{\left[\left(C_1'C_1''\right)s^2+G_1\left(C_1'+C_1''\right)s+G_1G_3\right]\left[\left(C_2'C_2''\right)s^2+G_2\left(C_2'+C_2''\right)s+G_2G_4\right]}} \qquad \textbf{(1-5)}$$

(γ) Για να μελετήσουμε την ευστάθεια του κυκλώματος, εξετάζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ψ(s), δηλαδή τον παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς G(s):

$$\psi(s)=\underbrace{\left[\left(C_1'C_1''\right)s^2+G_1\left(C_1'+C_1''\right)s+G_1G_3\right]}_{\psi_1(s)}\underbrace{\left[\left(C_2'C_2''\right)s^2+G_2\left(C_2'+C_2''\right)s+G_2G_4\right]}_{\psi_2(s)}$$

Για τις δοσμένες τιμές των στοιχείων το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γίνεται:

$$\psi(s) = \underbrace{\left[s^2 + 2G_1 s + G_1/3\right]}_{\psi_1(s)}\underbrace{\left[s^2 + 2G_2 s + G_2\right]}_{\psi_2(s)}$$

Καθώς το ψ(s) είναι παραγοντοποιημένο, για την ευστάθεια εξετάζουμε κάθε παράγοντα (ψ_1 και ψ_2) ξεχωριστά (προφανώς οι πόλοι του ψ είναι οι πόλοι του ψ_1 και οι πόλοι του ψ_2, και το σύστημα είναι ευσταθές «εαν και μόνο εαν» και το ψ_1 και το ψ_2 είναι ευσταθή πολυώνυμα). Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Routh για κάθε ένα από τα ψ_i (i=1,2):

$\psi_1(s)$

s^2	1	$G_1/3$
s^1	$2G_1$	
s^0	$G_1/3$	

$\psi_2(s)$

s^2	1	G_2
s^1	$2G_2$	
s^0	G_2	

Καθώς G_1 και G_2 είναι αγωγιμότητες που αντιστοιχούν στους γραμμικούς χρονικά αμετάβλητους αντιστάτες R_1 και R_2, ισχύει: $G_1>0$ και $G_2>0$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει αλλαγή προσήμου (ούτε στοιχείο με μηδενική τιμή) στην πρώτη στήλη, τόσο για το $\psi_1(s)$ όσο και για το $\psi_2(s)$. Επομένως, και τα δύο τριώνυμα έχουν ρίζες στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο και το σύστημα είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές*.

Παρατήρηση: Εαν $G_1=0$ ή $G_2=0$ (δηλαδή ο αντίστοιχος κλάδος κυκλώματος ανοικτοκυκλωμένος), τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είχε διπλό πόλο επάνω στο φανταστικό άξονα (s=0) και το σύστημα θα ήταν ασταθές.

(δ) Για τις δοσμένες τιμές των στοιχείων του παραπάνω ερωτήματος, η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G(s) = \frac{10s\cdot[1+2s]\cdot[1/3+2s]}{\left[s^2+2G_1 s+G_1/3\right]\left[s^2+2G_2 s+G_2\right]} = \frac{\frac{10}{3}\cdot s\cdot[1+2s]\cdot[1+6s]}{\frac{G_1G_2}{3}\cdot\left[1+6s+\left(\frac{3}{G_1}\right)s^2\right]\left[1+2s+\left(\frac{1}{G_2}\right)s^2\right]} \quad \textbf{(1-6)}$$

(δ-i) Όταν $R_2=2\Omega$ και $R_1=20\Omega$, η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται:

$$G(s) = \frac{10s\cdot[1+2s]\cdot[1/3+2s]}{\left[s^2+(1/10)s+(1/60)\right]\left[s^2+s+(1/2)\right]} = \frac{\frac{10}{3}\cdot s\cdot[1+2s]\cdot[1+6s]}{\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[1+6s+60s^2\right]\left[1+2s+2s^2\right]} \Rightarrow$$

$$\boxed{G(s) = 400\cdot\frac{s\cdot[1+2s]\cdot[1+6s]}{\left[1+6s+60s^2\right]\left[1+2s+2s^2\right]}} \quad \textbf{(1-7)}$$

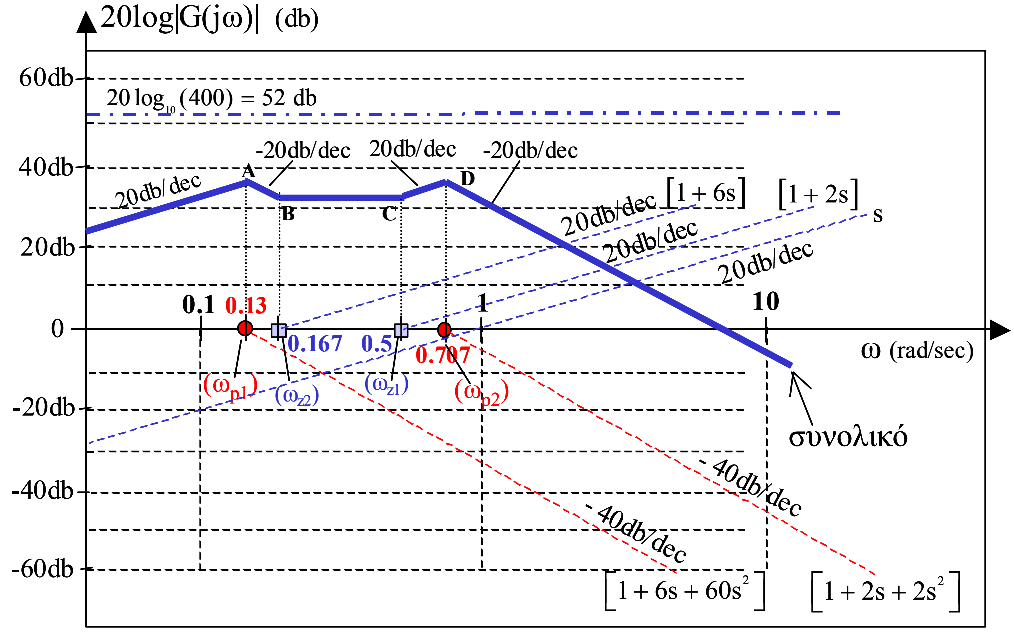
Παρατήρηση: Οι παράγοντες του παρανομαστή έχουν διακρίνουσες αντίστοιχα: $\Delta_1=36-240<0$ και $\Delta_2=4-8<0$ και συνεπώς δεν παραγοντοποιούνται σε πρωτοβάθμιους όρους με πραγματικούς συντελεστές.

Για τις κυκλικές *συχνότητες θλάσης* έχουμε:

Κυκλικές συχνότητες θλάσης των *μηδενικών* είναι $\omega_{z1} = \frac{1}{2} = 0.5$ και $\omega_{z2} = \frac{1}{6} = 0.167$

Κυκλικές συχνότητες θλάσης των *πόλων* είναι $\omega_{p1} = \frac{1}{\sqrt{60}} = 0.13$ και $\omega_{p2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

Το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode επομένως, για αυτές τις τιμές των στοιχείων του κυκλώματος, έχει την ακόλουθη μορφή:



(δ-ii) Η κλίση στο τμήμα ΑΒ του παραπάνω ασυμπτωτικού διαγράμματος Bode είναι –20db/dec, στο BC είναι 0 db/dec, και στο CD είναι +20db/dec. Συνεπώς, για να είναι τα σημεία Α και D στο ίδιο ύψος, πρέπει οι προβολές των τμημάτων ΑΒ και CD στον άξονα των κυκλικών συχνοτήτων. Ο άξονας αυτός είναι (προσοχή!) ως γνωστόν λογαριθμικός, οπότε θα έχουμε:

$$\log \omega_{z2} - \log \omega_{p1} = \log \omega_{p2} - \log \omega_{z1} \quad , \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$\log\left(\frac{\omega_{z2}}{\omega_{p1}}\right) = \log\left(\frac{\omega_{p2}}{\omega_{z1}}\right) \Leftrightarrow \frac{\omega_{z2}}{\omega_{p1}} = \frac{\omega_{p2}}{\omega_{z1}} \Leftrightarrow \boxed{\omega_{p1}\omega_{p2} = \omega_{z1}\omega_{z2}}$$

Από την παραπάνω σχέση (1-6), η οποία δίνει γενικά την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης μεταφοράς συναρτήσει των G_1 και G_2, έχουμε:

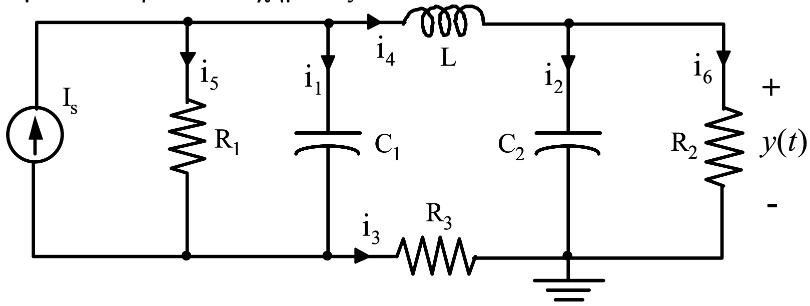
$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{G_1}{3}} \text{ και } \omega_{p2} = \sqrt{G_2} \text{ , ενώ: } \omega_{z1} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ και } \omega_{z2} = \frac{1}{6} = 0.167$$

οπότε παίρνουμε τελικά τη σχέση:

$$\sqrt{G_1 G_2} = \sqrt{3} \cdot 0.167 \cdot 0.5 = 0.1446 \Leftrightarrow \underline{G_1 G_2 = 0.0209}$$

<u>Θέμα 2</u> (35%)

Για το κύκλωμα του παρακάτω Σχήματος 2:



Σχήμα 2

(α) (5%) Να σχεδιαστεί ο γράφος $\mathcal{G}$ του κυκλώματος (χρησιμοποιώντας τις φορές αναφοράς και την αρίθμηση των ρευμάτων, όπου αυτά δίδονται στο Σχήμα 2). Να επιλεγεί ένα κανονικό δέντρο $\mathcal{T}$ πάνω στον $\mathcal{G}$ και να προσδιοριστεί η μήτρα Q θεμελιωδών ομάδων διαχωρισμού του $\mathcal{T}$.

(β) (10%) Να επιλεγεί ένα διάνυσμα μεταβλητών του κυκλώματος ως διάνυσμα κατάστασης. Να γραφούν στο πεδίο του χρόνου οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος, καθώς και η εξίσωση εξόδου, θεωρώντας ως έξοδο τη μεταβλητή $y = v_{R2}$.

(γ) (15%) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς: $H(s)=Y(s)/I_s(s)$ συναρτήσει των R_1, R_2, R_3, C_1, C_2 και L. (Βοήθημα: προς απλοποίηση μπορεί να γίνει η αντικατάσταση $\omega_1=1/(R_1C_1)$, $\omega_2=1/(R_2C_2)$, και $\omega_3=R_3/L$).

Θέτοντας $R_1=R_2=R=1\Omega$, $C_1=C_2=C=1F$, $L=1H$ και $R_3 = k \cdot R$ (με $k > 0$), να προσδιοριστούν οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς. Να εξεταστεί για ποιές τιμές του k υπάρχουν μιγαδικοί πόλοι.

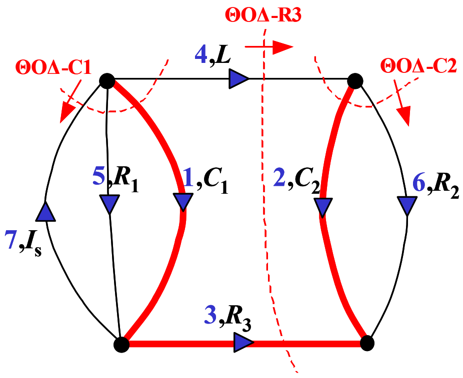
(δ) (5%) Θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, και θέτοντας k=3, να προσδιοριστεί η κρουστική απόκριση του κυκλώματος, και να γραφεί στη μορφή:

$$h(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t}\cos(\Omega_1 t + \Phi_1) + A_2 e^{-\lambda_2 t}\cos(\Omega_2 t + \Phi_2)$$

Να προσδιορισθούν τα A_1, A_2, Ω_1, Ω_2, λ_1, λ_2, και Φ_1, Φ_2.

<u>Λύση</u>

(α) Ο γράφος του δοσμένου κυκλώματος εικονίζεται στο ακόλουθο Σχήμα, όπου έχει χρησιμοποιηθεί η αρίθμηση των κλάδων και οι φορές αναφοράς που δίνονται στο Σχήμα 2.



Γράφος κυκλώματος, κανονικό δέντρο και θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού

Στο ίδιο σχήμα, εικονίζεται και ένα κανονικό δέντρο (περιέχει τους πυκνωτές ως βλαστούς, και τα επαγωγικά στοιχεία ως συνδέσμους). Η μήτρα Q θεμελιωδών ομάδων διαχωρισμού είναι:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \boldsymbol{Q} = & \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{ΘΟΔ-C1} \\ \text{ΘΟΔ-C2} \\ \text{ΘΟΔ-R3} \end{array} \end{array}$$

(β) Επιλέγουμε ως διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης το $\underline{x} = [v_{c1}\ \ v_{c2}\ \ i_L]^{\mathrm{T}} = [v_1\ \ v_2\ \ i_4]^{\mathrm{T}}$.

Γράφουμε τις εξισώσεις ρευμάτων (νόμος ρευμάτων Kirchhoff – NPK) για τις θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού (ΘΟΔ) που αντιστοιχούν στους κλάδους C_1 και C_2:

<u>Θ.Ο.Δ.</u> (θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού)

$$\Theta.O.\Delta. - C_1: \quad i_1 + i_4 + i_5 - i_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \tfrac{d}{dt} v_{c1} = -i_L - \frac{1}{R_1} v_5 + i_s \tag{1}$$

$$\Theta.O.\Delta. - C_2: \quad i_2 - i_4 + i_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 \cdot \tfrac{d}{dt} v_{c2} = i_L - \frac{1}{R_2} v_6 \tag{2}$$

Γράφουμε εν συνεχεία τις εξισώσεις τάσεων (νόμος τάσεων Kirchhoff – NTK) για τους θεμελιώδεις βρόχους (ΘΒ), οι οποίοι ορίζονται από συνδέσμους που αντιστοιχούν στα επαγωγικά στοιχεία του κυκλώματος (δηλαδή εδώ τον κλάδο 4 που αντιστοιχεί στην επαγωγή L):

<u>Θ.Β.</u> (θεμελιώδεις βρόχοι)

$$\Theta.B. - L\ (4\text{-}2\text{-}\underline{3}\text{-}\underline{1}): \quad v_4 + v_2 - v_3 - v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad L \cdot \tfrac{d}{dt} i_L = v_{c1} - v_{c2} + v_3 \tag{3}$$

Πρέπει επομένως τώρα να εκφράσουμε τις τάσεις κλάδων v_5, v_6, και v_3, συναρτήσει των μεταβλητών κατάστασης v_{c1}, v_{c2}, και i_L, ώστε να πάρουμε τις σχέσεις στη μορφή των εξισώσεων κατάστασης.

Για τα v_5, v_6 μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις τάσεων για τους αντίστοιχους θεμελιώδεις βρόχους ως εξής:

$$\Theta.B. - 5\ (5\text{-}\underline{1}): \quad v_5 - v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_5 = v_{c1} \tag{4}$$

$$\Theta.B. - 6\ (6\text{-}\underline{2}): \quad v_6 - v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_6 = v_{c2} \tag{5}$$

Για το v_3 μπορούμε να γράψουμε το NPK στη ΘΟΔ για τον αντίστοιχο κλάδο 3:

$$\Theta.O.\Delta. - R_3: \quad i_3 + i_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_3 = -i_L$$

και επειδή $v_3 = R_3\, i_3$ έχουμε: $$v_3 = -R_3 i_L \tag{6}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε απ'ευθείας τις εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος:

$$\left\{\begin{matrix} (1) \wedge (4) \\ (2) \wedge (5) \\ (3) \wedge (6) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} C_1 \cdot \tfrac{d}{dt} v_{c1} = -\frac{1}{R_1} v_{c1} - i_L + i_s \\ C_2 \cdot \tfrac{d}{dt} v_{c2} = -\frac{1}{R_2} v_{c2} + i_L \\ L \cdot \tfrac{d}{dt} i_L = v_{c1} - v_{c2} - R_3 i_L \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \tfrac{d}{dt} v_{c1} = -\frac{1}{R_1 C_1} v_{c1} - \frac{1}{C_1} i_L + \frac{1}{C_1} i_s \\ \tfrac{d}{dt} v_{c2} = -\frac{1}{R_2 C_2} v_{c2} + \frac{1}{C_2} i_L \\ \tfrac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} v_{c1} - \frac{1}{L} v_{c2} - \frac{R_3}{L} i_L \end{matrix}\right\}$$

Οι εξισώσεις αυτές σε διανυσματική μορφή γράφονται ως εξής:

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A} \cdot \underline{x} + \mathbf{B} \cdot i_s \tag{7}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R_3}{L} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/C_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left(\underline{x} = [v_{c1}\ \ v_{c2}\ \ i_L]^{\mathrm{T}}\right)$$

Για την εξίσωση εξόδου έχουμε: $y = v_{c2}$ και άρα: $y = \mathbf{C} \cdot \underline{x} + \mathbf{D} \cdot i_s$, όπου $\mathbf{C} = [0\ \ 1\ \ 0]$ και $\mathbf{D}$=0.

(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς H(s)=Y(s)/I_s(s) δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση (D=0):

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}(s)=\mathbf{C}\cdot(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B} \\ \text{όπου:} \\ [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix} s+\frac{1}{R_1C_1} & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & s+\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & s+\frac{R_3}{L}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1/C_1\\0\\0\end{bmatrix}\quad \text{και}\quad \mathbf{C}=[0\ \ 1\ \ 0] \end{array}\right\} \quad \textbf{(8)}$$

Είναι:

$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\dfrac{1}{\Delta(s)}\cdot[\Delta'_{ij}]$,

όπου:

$\Delta(s)$ = “η ορίζουσα της μήτρας $[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$”, και

$[\Delta'_{ij}]_{(i=1,\ldots 3,\ \text{και}\ j=1,\ldots 3)}$ = “ο 3x3 πίνακας $\mathrm{Adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ που περιέχει τα στοιχεία Δ'_{ij}”, όπου

$\Delta'_{ij} = \Delta_{ji} = (-1)^{(i+j)}$ × “μερική ορίζουσα που προκύπτει με διαγραφή της <u>γραμμής *j*</u> και της <u>στήλης *i*</u> από τη μήτρα $[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$”

Η σχέση (8) επομένως γίνεται:

$$\mathrm{H}(s)=\frac{1}{\Delta(s)}\cdot[0\ \ 1\ \ 0]\cdot[\Delta'_{ij}]\cdot\begin{bmatrix}1/C_1\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \mathrm{H}(s)=\frac{1}{\Delta(s)}\cdot[0\ \ 1\ \ 0]\cdot[\Delta'_{ij}]\cdot\begin{bmatrix}1/C_1\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \mathrm{H}(s)=\frac{\Delta'_{21}}{C_1\cdot\Delta(s)} \quad \textbf{(9)}$$

Αντικαθιστώντας και τις σχέσεις $\omega_1=1/(R_1C_1)$, $\omega_2=1/(R_2C_2)$, και $\omega_3=R_3/L$, έχουμε:

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} s+\omega_1 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & s+\omega_2 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & s+\omega_3\end{vmatrix}=(s+\omega_1)\left[(s+\omega_2)(s+\omega_3)+\frac{1}{LC_2}\right]+\frac{1}{C_1}\frac{1}{L}(s+\omega_2)=$$
$$=(s+\omega_1)(s+\omega_2)(s+\omega_3)+\frac{(s+\omega_1)}{LC_2}+\frac{(s+\omega_2)}{LC_1}$$

και

$$\Delta'_{21}=(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix}0 & -\frac{1}{C_2}\\ -\frac{1}{L} & s+\omega_3\end{vmatrix}=\frac{1}{LC_2}$$

Η σχέση (9) επομένως γράφεται:

$$\boxed{\mathrm{H}(s)=\frac{1}{(LC_1C_2)\left[(s+\omega_1)(s+\omega_2)(s+\omega_3)+\frac{(s+\omega_1)}{LC_2}+\frac{(s+\omega_2)}{LC_1}\right]}} \quad \textbf{(10)}$$

Θέτοντας $R_1=R_2=R=1\Omega$, $C_1=C_2=C=1\mathrm{F}$, $L=1\mathrm{H}$ και $R_3=k\cdot R$ (με $k>0$), έχουμε: $\omega_1=1/(R_1C_1)=1$, $\omega_2=1/(R_2C_2)=1$, $\omega_3=R_3/L=k>0$. Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι ως γνωστόν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ψ(s) (δηλαδή του παρανομαστή της συνάτησης μεταφοράς), για το οποίο έχουμε:

$$\psi(s)=[(s+1)(s+1)(s+k)+(s+1)+(s+1)]=(s+1)[(s+1)(s+k)+1+1]$$
$$=(s+1)[s^2+(k+1)s+k+2]$$

Οι ρίζες p_1,p_2,p_3 του ψ(s) είναι επομένως:

$p_1=-1$ και p_2,p_3 οι ρίζες του τριωνύμου $\psi_1(s)=s^2+(k+1)s+k+2$ του οποίου η διακρίνουσα ισούται με: $\delta=(k+1)^2-4(k+2)=k^2-2k-7=(k-1)^2-8$

Συνολικά για τα p_2,p_3 διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις (με βάση το πρόσημο του δ, το οποίο εξαρτάται από την τιμή του k, με k>0):

- δ>0, δηλαδή: $(k-1)^2 > 8 \Leftrightarrow k > 1+2\sqrt{2}$, οπότε οι p_2,p_3 είναι πραγματικοί αριθμοί:
$$p_{2,3} = -\frac{(k+1)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(k-1)^2 - 8} \qquad (p_{2,3} < 0)$$
- δ=0, δηλαδή: $k = 1+2\sqrt{2}$, οπότε: $p_2 = p_3 = -\frac{(k+1)}{2} < 0$
- δ<0, δηλαδή: $0 < k < 1+2\sqrt{2}$, οπότε στην περίπτωση αυτή οι p_2,p_3 είναι μιγαδικοί αριθμοί:
$$p_{2,3} = -\frac{(k+1)}{2} \pm \frac{j}{2}\sqrt{8-(k-1)^2} \qquad (\mathrm{Re}(p_{2,3}) < 0)$$

(δ) Θέτοντας k=3, η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται: $\mathrm{H}(s) = \dfrac{1}{(s+1)[s^2+4s+5]}$

Η κρουστική απόκριση του κυκλώματος είναι: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathrm{H}(s)\right]$

Αναπτύσουμε κατά τα γνωστά τη συνάρτηση μεταφοράς σε μερικά κλάσματα, για να υπολογίσουμε στη συνέχεια τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Έχουμε:

$$\mathrm{H}(s) = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2 s + A_3}{(s^2+4s+5)} = \frac{(A_1+A_2)s^2 + (4A_1+A_2+A_3)s + (5A_1+A_3)}{(s+1)(s^2+4s+5)} \qquad \textbf{(11)}$$

οπότε παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} A_1 + A_2 = 0 \\ 4A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ 5A_1 + A_3 = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A_1 = -A_2 \\ 3A_1 + A_3 = 0 \\ 5A_1 + A_3 = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A_1 = -A_2 \\ 3A_1 + A_3 = 0 \\ 2A_1 = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A_2 = -1/2 \\ A_3 = -3/2 \\ A_1 = 1/2 \end{Bmatrix}$$

Η παραπάνω σχέση (11) επομένως γράφεται:

$$\mathrm{H}(s) = \frac{(1/2)}{(s+1)} - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{s+3}{(s^2+4s+5)}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{2}\cdot\left[\underbrace{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}}_{\mathcal{L}(e^{-2t}\cos t)} + \underbrace{\frac{1}{(s+2)^2+1}}_{\mathcal{L}(e^{-2t}\sin t)}\right]$$

και η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathrm{H}(s)\right] = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\left[\cos t + \sin t\right]$$

Μπορούμε επίσης την παραπάνω σχέση να τη γράψουμε στη μορφή:

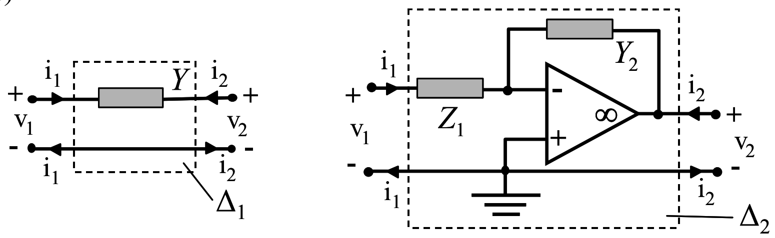
$\cos t + \sin t = |A|\cos(t+\phi) = |A|\cos(\phi)\cos(t) - |A|\sin(\phi)\sin(t)$, που σημαίνει:

$$\begin{Bmatrix} |A|\cos(\phi) = 1 \\ |A|\sin(\phi) = -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} |A| = \sqrt{2} \\ \phi = \mathrm{atan2}(-1/1) = -45^o \end{Bmatrix}$$

Επομένως:

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2t}\cos\left(t - 45^o\right)}$$

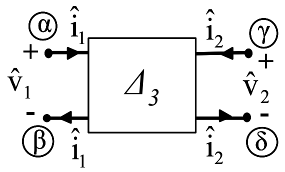
Θέμα 3 (40%)



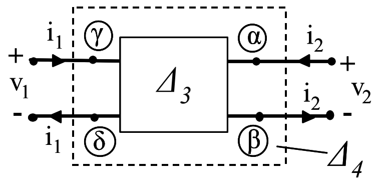
Σχήμα 3-1

(α) (5%) Να ευρεθούν οι μήτρες παραμέτρων μεταφοράς T_1 και T_2 των διθύρων Δ_1 και Δ_2 του Σχήματος 3-1.

(β) (5%) Αν είναι γνωστή η μήτρα συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης $\hat{Y}=\left[\hat{y}_{ij}\right]$ (i=1,2 και j=1,2) του διθύρου Δ_3 του Σχήματος 3-2α, να ευρεθεί η μήτρα συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης $Y=\left[y_{ij}\right]$ (i=1,2 και j=1,2) του διθύρου Δ_4 του Σχήματος 3-2β.

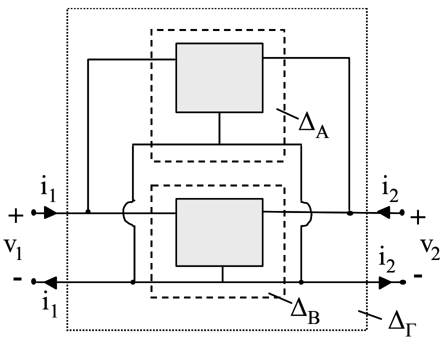


Σχήμα 3-2α

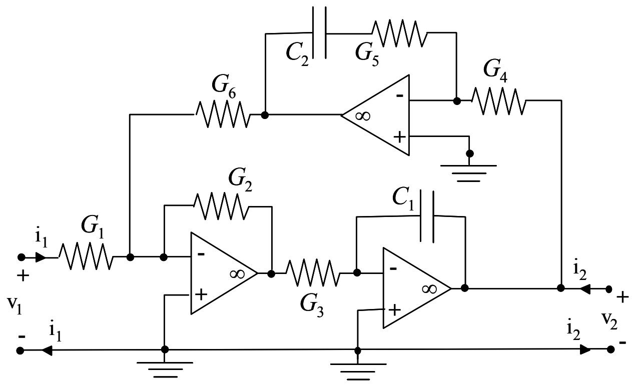


Σχήμα 3-2β

(γ) (10%) Έστω ότι είναι γνωστές οι μήτρες συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης $Y_A=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ του Δ_A, και παραμέτρων μεταφοράς $T_B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$ του Δ_B (βλ. Σχήμα 3-3). Να εξετασθεί εαν υπάρχει η μήτρα συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης Y_B του Δ_B. Να ευρεθεί η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς T_Γ του συνολικού διθύρου Δ_Γ (αφού γίνει έλεγχος των κριτηρίων Brune).



Σχήμα 3-3

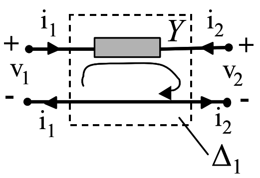


Σχήμα 3-4

(δ) (20%) Κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων των ερωτημάτων (α), (β), (γ) παραπάνω, να ευρεθεί η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς $T_{ολ}$ του διθύρου του Σχήματος 3-4 καθώς και η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=V_2/V_1$.

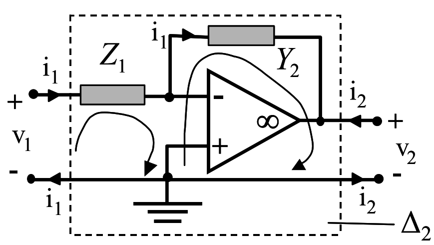
Λύση

(α) Για τις μήτρες παραμέτρων μεταφοράς T_1 και T_2 των διθύρων Δ_1 και Δ_2 έχουμε:



$$\left.\begin{aligned} i_1 &= -i_2 \\ -v_1+\frac{i_1}{Y}+v_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} i_1 &= -i_2 \\ v_1 &= v_2-\frac{i_2}{Y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{Y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

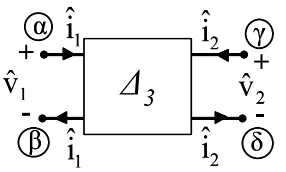
$$\Rightarrow T_1=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{Y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

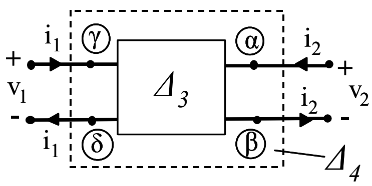


$$\left.\begin{aligned} -v_1 + i_1 Z_1 = 0 \\ \frac{i_1}{Y_2} + v_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} v_1 = i_1 Z_1 = -Z_1 Y_2 v_2 \\ i_1 = -v_2 Y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_1Y_2 & 0 \\ -Y_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow T_2 = \begin{bmatrix} -Z_1Y_2 & 0 \\ -Y_2 & 0 \end{bmatrix}$$

(β)





Για τα ρεύματα και τις τάσεις στις θύρες εισόδου και εξόδου των δύο διθύρων Δ_3 και Δ_4, έχουμε:

$$i_1 = \hat{i}_2\ , \qquad v_1 = \hat{v}_2 \quad \text{και}$$
$$i_2 = \hat{i}_1\ , \qquad v_2 = \hat{v}_1$$

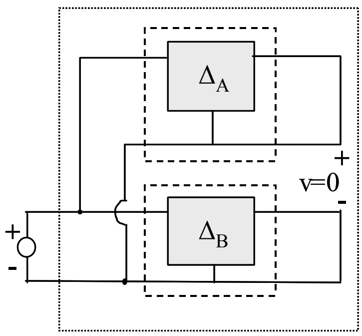
Είναι:

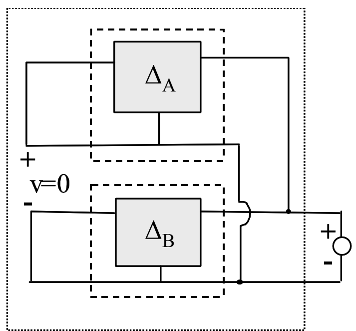
$$\begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix} = \hat{Y} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{11} & \hat{y}_{12} \\ \hat{y}_{21} & \hat{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{11} & \hat{y}_{12} \\ \hat{y}_{21} & \hat{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} i_1 = \hat{y}_{21} \cdot v_2 + \hat{y}_{22} \cdot v_1 \\ i_2 = \hat{y}_{11} \cdot v_2 + \hat{y}_{12} \cdot v_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{22} & \hat{y}_{21} \\ \hat{y}_{12} & \hat{y}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{bmatrix} \hat{y}_{22} & \hat{y}_{21} \\ \hat{y}_{12} & \hat{y}_{11} \end{bmatrix}, \text{ δηλαδή } \begin{cases} y_{11} = \hat{y}_{22}\ ,\ y_{12} = \hat{y}_{21} \\ y_{21} = \hat{y}_{12}\ ,\ y_{22} = \hat{y}_{11} \end{cases}$$

(γ) Αρχικά γίνεται έλεγχος των κριτηρίων Brune, για τη συνδεσμολογία του δοσμένου Σχήματος 3-3.





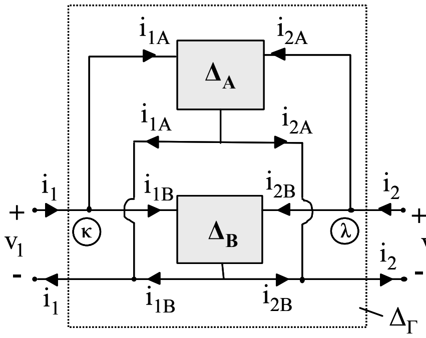
Τα κριτήρια Brune ισχύουν. Επομένως τα Δ_A και Δ_B στη δοσμένη συνδεσμολογία παραμένουν δίθυρα, και ισχύει:

$$Y_\Gamma = Y_A + Y_B \tag{1}$$

Έχουμε από τα δεδομένα του θέματος: $Y_A = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ και

$T_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ δεν υπάρχει μήτρα Y_B, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε απ'ευθείας τη σχέση (1) για να υπολογίσουμε τη μήτρα Y_Γ και εν συνεχεία την T_Γ.

Δεδομένου όμως ότι, λόγω ισχύος των κριτηρίων Brune, τα Δ_A και Δ_B στη δοσμένη συνδεσμολογία παραμένουν δίθυρα, μπορούμε να γράψουμε, χρησιμοποιώντας και το συμβολισμό του παρακάτω Σχήματος:



$$\begin{bmatrix} i_{1A} \\ i_{2A} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}}_{Y_A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_{1B} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{T_B} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_{2B} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας το N.P.K. στος κόμβους (κ) και (λ) έχουμε:

$$i_1 = i_{1A} + i_{1B} \quad (4\text{-}1)$$

$$i_2 = i_{2A} + i_{2B} \quad (4\text{-}2)$$

Επιπλέον:

$$(3) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} v_1 = 0 & (3.1) \\ i_{1B} = Cv_2 & (3.2) \end{cases}$$

και

$$(2) \;\Rightarrow\; i_{1A} = y_{11}v_1 + y_{12}v_2 \quad (2.1)$$

Για τον υπολογισμό της μήτρας T_Γ η οποία ζητείται, πρέπει να βρούμε μια σχέση της μορφής:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{T_\Gamma} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

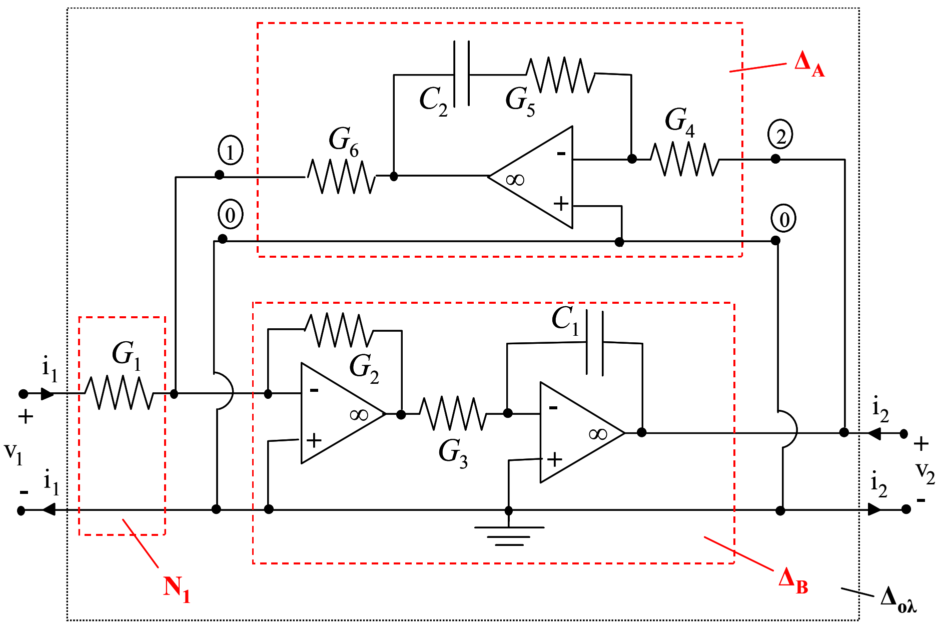
Από τη σχέση (3.1) έχουμε: v_1=0 $\Rightarrow$ t_{11}=0 και t_{12}=0.

$$(4.1) \;\Rightarrow\; i_1 = i_{1A} + i_{1B} \overset{(2.1)}{=} y_{11}v_1 + y_{12}v_2 + i_{1B} \overset{(3.2)}{=} y_{11}v_1 + y_{12}v_2 + Cv_2 \overset{(3.1)}{=} (y_{12}+C)v_2$$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (y_{12}+C) & 0 \end{bmatrix}}_{T_\Gamma} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (y_{12}+C) & 0 \end{bmatrix}$$

(δ) Όπως φαίνεται και στο ακόλουθο Σχήμα, το $\Delta_{ολ}$ αποτελείται από τον παράλληλο-παράλληλο συνδυασμό των Δ_A και Δ_B, ο οποίος συνδέεται αλυσωτά με το N_1. Τα Δ_A και Δ_B έχουν εσωτερική βραχυκύκλωση των κάτω ακροδεκτών εισόδου/εξόδου, όπως στο Σχήμα 3-3 του Θέματος, επομένως τα κριτήρια Brune ισχύουν (βλ. Ερώτημα (γ)).

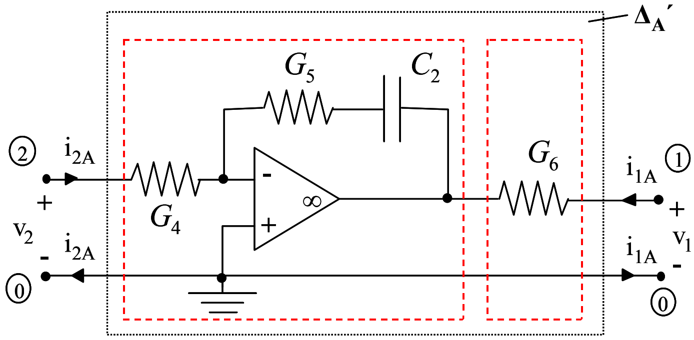


Η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς του Δ_B (εσωτερική αλυσωτή διασύνδεση δύο επιμέρους κυκλωμάτων της μορφής του ερωτήματος (α)) είναι:

$$T_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{sC_1}{G_3} & 0 \\ -sC_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ sC_1\frac{G_2}{G_3} & 0 \end{bmatrix}$$

(δεν υπάρχει μήτρα Y για το Δ_B, άρα ήδη διαφαίνεται η πιθανή εφαρμογή των αποτελεσμάτων του ερωτήματος (γ), για τη διασύνδεση Δ_A των και Δ_B, με: $C = sC_1\frac{G_2}{G_3}$)

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων του Δ_A θα εφαρμοστεί το ερώτημα (β). Υπολογίζονται πρώτα οι παράμετροι μεταφοράς T_A' για το δίθυρο Δ_A' του ακολούθου σχήματος:



Το Δ_A' αποτελείται και πάλι από δύο δίθυρα της μορφής του ερωτήματος (α) συνδεδεμένα αλυσωτά, επομένως:

$$T_A' = \begin{bmatrix} -\frac{Y_2}{G_4} & 0 \\ -Y_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{G_6} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ όπου } Y_2 = \frac{1}{\frac{1}{G_5} + \frac{1}{sC_2}} = \frac{sC_2G_5}{sC_2 + G_5}$$

Άρα:

$$T_A' = \begin{bmatrix} -\frac{Y_2}{G_4} & -\frac{Y_2}{G_4G_6} \\ -Y_2 & -\frac{Y_2}{G_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{sC_2G_5}{(sC_2+G_5)G_4} & -\frac{sC_2G_5}{(sC_2+G_5)G_4G_6} \\ -\frac{sC_2G_5}{(sC_2+G_5)} & -\frac{sC_2G_5}{(sC_2+G_5)G_6} \end{bmatrix}$$

και $Y'_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} G_4 & 0 \\ \dfrac{G_4 G_6}{Y_2} & G_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_4 & 0 \\ \dfrac{G_4 G_6 (sC_2 + G_5)}{sC_2 G_5} & G_6 \end{bmatrix}$

Το δίθυρο Δ_{A}, το οποίο συνδέεται παράλληλα-παράλληλα με το Δ_{B}, είναι το Δ_{A}' με αντίστροφα τοποθετημένες τις θύρες εισόδου και εξόδου. Η μήτρα Y_{A} του Δ_{A} επομένως προκύπτει από τη μήτρα Y_{A}' του Δ_{A}' με εφαρμογή του ερωτήματος (β):

$$Y_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} G_6 & \dfrac{G_4 G_6}{Y_2} \\ 0 & G_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_6 & \dfrac{G_4 G_6 (sC_2 + G_5)}{sC_2 G_5} \\ 0 & G_4 \end{bmatrix}$$

Η μήτρα T_Γ του παράλληλου-παράλληλου συνδυασμού των Δ_{A} και Δ_{B} προκύπτει, όπως προείπαμε, με εφαρμογή του ερωτήματος (γ):

$$T_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (y_{12} + C) & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(\dfrac{G_4 G_6}{Y_2} + sC_1 \dfrac{G_2}{G_3} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(\dfrac{G_4 G_6 (sC_2 + G_5)}{sC_2 G_5} + \dfrac{sC_1 G_2}{G_3} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Τέλος, για το $T_{\text{ολ}}$ έχουμε:

$$T_{\text{ολ}} = T_{\mathrm{N}_1} \cdot T_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{G_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(\dfrac{G_4 G_6}{Y_2} + sC_1 \dfrac{G_2}{G_3} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{G_1} \left(\dfrac{G_4 G_6 (sC_2 + G_5)}{sC_2 G_5} + \dfrac{sC_1 G_2}{G_3} \right) & 0 \\ \dfrac{G_4 G_6 (sC_2 + G_5)}{sC_2 G_5} + \dfrac{sC_1 G_2}{G_3} & 0 \end{bmatrix}$$

Για τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \dfrac{v_2}{v_1}$ έχουμε:

$$G(s) = \frac{v_2}{v_1} = K_V \big|_{Z_l \to \infty} = \left. \frac{Z_l}{B + A Z_l} \right|_{Z_l \to \infty} = \left. \frac{1}{\dfrac{B}{Z_l} + A} \right|_{Z_l \to \infty} = \frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{sC_2 G_1 G_3 G_5}{s^2 C_1 C_2 G_2 G_5 + G_3 G_4 G_6 (sC_2 + G_5)}$$