ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧ/ΚΩΝ & ΜΗΧ/ΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

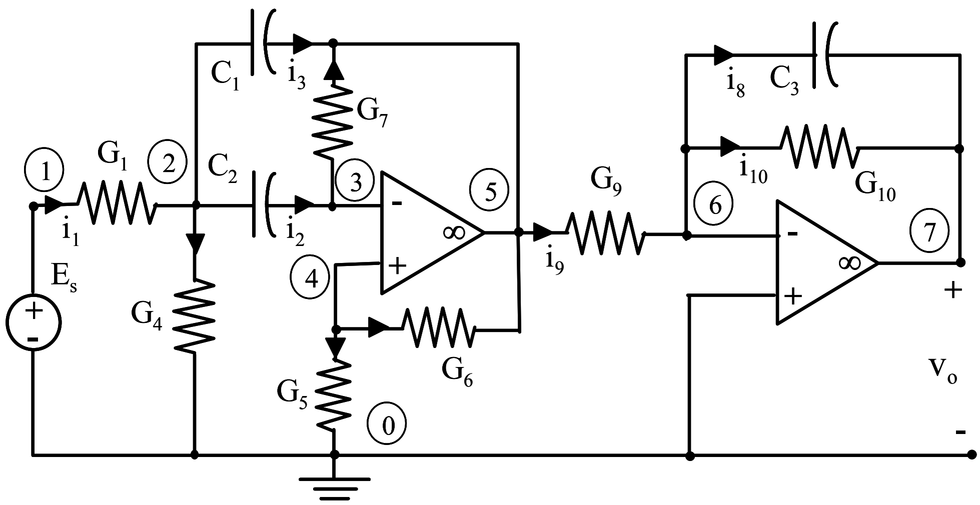
Μάθημα: "ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΚΤΥΩΝ" ($5^{ο}$ εξάμηνο)

Ακαδ. Έτος: 2002-2003

$2^{ο}$ Τμήμα (Κ-Μ), Διδάσκων: Κ. Τζαφέστας

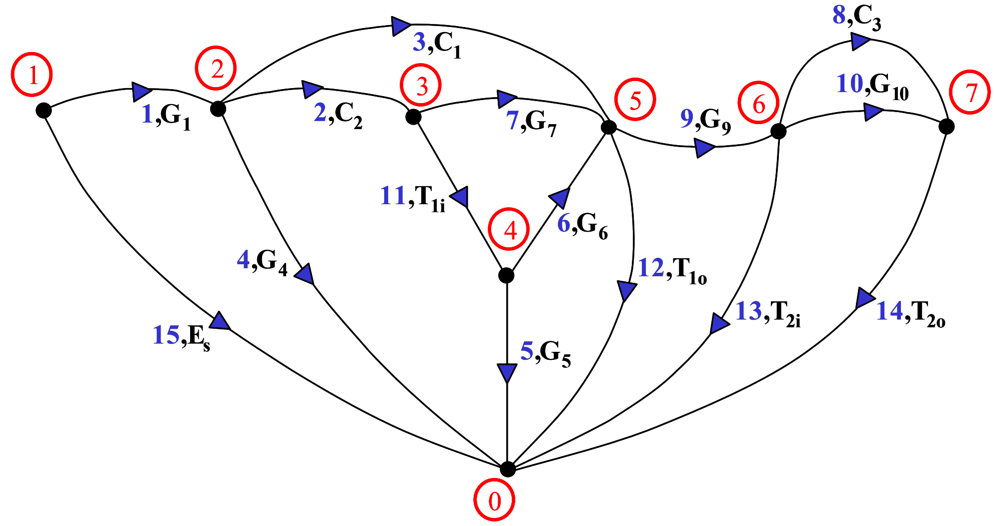
Λύσεις $2^{ης}$ Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 2-1 (*I- και V-γράφος, τροποποιημένη μέθοδος κόμβων, εξισώσεις κατάστασης, συνάρτηση μεταφοράς, αποκρίσεις δικτύου, διάγραμμα Bode*)



Σχήμα 2-1

(α) Να σχεδιαστεί ο I- και ο V-γράφος, και να γραφούν οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου κόμβων με δύο γράφους.



Στο παραπάνω Σχήμα εικονίζεται ο πλήρης γράφος του κυκλώματος, ο οποίος περιέχει οκτώ (8) κόμβους (από τον κόμβο αναφοράς 0 –γείωση– έως τον κόμβο 7), και δεκαπέντε (15) κλάδους. Σε κάθε κλάδο, στον παραπάνω πλήρη γράφο του κυκλώματος, σημειώνουμε την αρίθμησή του (από 1 έως 15), τη θετική φορά αναφοράς αυτού, καθώς και το στοιχείο κυκλώματος στο οποίο αντιστοιχεί (με T_{ki}, T_{ko} σημειώνουμε τον κλάδο του γράφου που αντιστοιχεί στη θύρα εισόδου και στη θύρα εξόδου, αντίστοιχα, για τον k τελεστικό ενισχυτή, με k=1,2 για το κύκλωμα της άσκησης).

Απλοποιώντας κατάλληλα τον πλήρη γράφο του κυκλώματος μπορούμε να πάρουμε τον I- και V-γράφο αυτού, απαλείφοντας κατά τα γνωστά κάποιους κλάδους, και σχεδιάζοντας κατά περίπτωση τους κόμβους αυτών είτε να ταυτίζονται είτε να παραμένουν διαχωρισμένοι. Στο συγκεκριμένο κύκλωμα της άσκησης έχουμε:

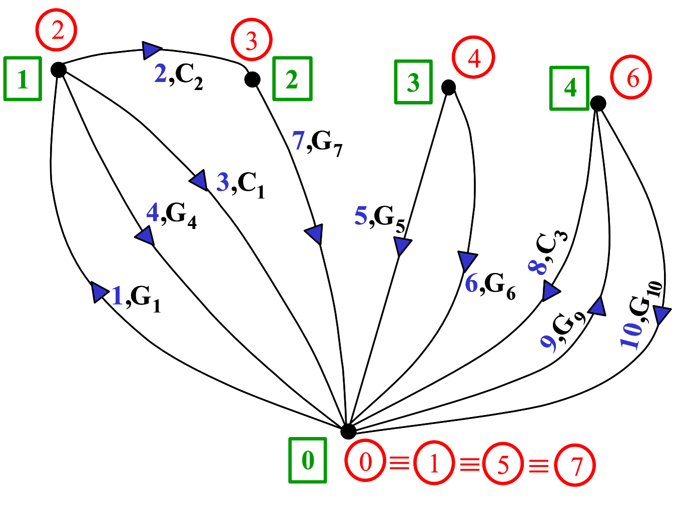
I-γράφος

• *Τελεστικός ενισχυτής T1*
Κλάδοι 11 και 12 παραλείπονται ως εξής:
Κλάδος 11-T_{1i}: κόμβοι 3 και 4 διαχωρισμένοι
Κλάδος 12- T_{1o}: κόμβοι 5 και 0 ταυτίζονται (**5≡0**)

• *Τελεστικός ενισχυτής T2*
Κλάδοι 13 και 14 παραλείπονται ως εξής:
Κλάδος 13-T_{1i}: κόμβοι 6 και 0 διαχωρισμένοι
Κλάδος 14-T_{1o}: κόμβοι 7 και 0 ταυτίζονται (**7≡0**)

• *Ανεξάρτητη πηγή τάσης E_s*
Κλάδος 15 παραλείπεται, κόμβοι 1 και 0 ταυτίζονται. (**1≡0**)
Άρα ο I-γράφος θα έχει 3 κόμβους και 5 κλάδους λιγότερους από τον πλήρη γράφο (δηλαδή n_I=5, και b_I=10).

Ο I-γράφος φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 2-1α:



Σχήμα 2-1α: Ο I-γράφος του κυκλώματος

V-γράφος

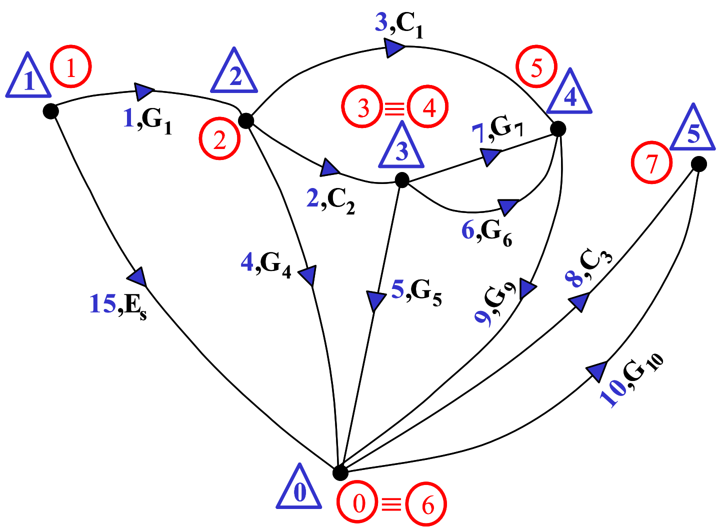
• *Τελεστικός ενισχυτής T1*
Κλάδοι 11 και 12 παραλείπονται ως εξής:
Κλάδος 11-T_{1i}: κόμβοι 3 και 4 ταυτίζονται (**3≡4**)
Κλάδος 12- T_{1o}: κόμβοι 5 και 0 διαχωρισμένοι

• *Τελεστικός ενισχυτής T2*
Κλάδοι 13 και 14 παραλείπονται ως εξής:
Κλάδος 13-T_{1i}: κόμβοι 6 και 0 ταυτίζονται (**6≡0**)
Κλάδος 14-T_{1o}: κόμβοι 7 και 0 διαχωρισμένοι

• *Ανεξάρτητη πηγή τάσης E_s*
Κλάδος 15 παραμένει ως έχει.

Άρα ο V-γράφος θα έχει 2 κόμβους και 4 κλάδους λιγότερους από τον πλήρη γράφο (δηλαδή n_V=6, και b_V=11).

Ο V-γράφος φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 2-1β:



Σχήμα 2-1β: Ο V-γράφος του κυκλώματος

Γράφουμε στη συνέχεια τις εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων κατά τα γνωστά. Δηλαδή ακολουθούμε τα εξής 3 βήματα: (i) γράφουμε τους νόμους ρευμάτων Kirchhoff (NPK) για τους n_I κόμβους του I-γράφου, (ii) κάθε ρεύμα κλάδου που αντιστοιχεί σε v-ελεγχόμενο στοιχείο κυκλώματος γράφεται, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη περιγραφική σχέση κλάδου, στη μορφή: (σύνθετη αγωγιμότητα κλάδου) x (τάση κλάδου), ενώ όλα τα ρεύματα κλάδων που αντιστοιχούν σε μη v-ελεγχόμενα στοιχεία κυκλώματος παραμένουν στις εξισώσεις ως άγνωστες μεταβλητές, και (iii) περνώντας στο V-γράφο, κάθε εμφανιζόμενη μεταβλητή τάση κλάδου αντικαθίσταται ως διαφορά τάσεων κόμβων του V-γράφου, ώστε να εμφανιστούν τελικά ώς άγνωστες μεταβλητές οι τάσεις των κόμβων του V-γράφου, και τα ρεύματα των μη v-ελεγχόμενων κλάδων του I-γράφου. Στο σύστημα αυτό (n_I x n_v) προστίθενται κατάλληλα και οι

εξισώσεις (περιγραφικές σχέσεις κλάδων) που αντιστοιχούν στα μη v-ελεγχόμενα στοιχεία (π.χ. πηγές τάσεις κλπ.).
Έχουμε επομένως (θεωρώντας για την ώρα μηδενικές αρχικές συνθήκες):

$\boxed{1}$: $-i_1+i_2+i_3+i_4=0 \;\Rightarrow\; -G_1v_1+(sC_2)v_2+(sC_1)v_3+G_4v_4=0$
$\Rightarrow\; -G_1(e_1-e_2)+(sC_2)(e_2-e_3)+(sC_1)(e_2-e_4)+G_4(e_2)=0$

$\boxed{2}$: $-i_2+i_7=0 \;\Rightarrow\; -(sC_2)v_2+G_7v_7=0$
$\Rightarrow\; -(sC_2)(e_2-e_3)+G_7(e_3-e_4)=0$

$\boxed{3}$: $i_5+i_6=0 \;\Rightarrow\; G_5v_5+G_6v_6=0$
$\Rightarrow\; G_5(e_3)+G_6(e_3-e_4)=0$

$\boxed{4}$: $i_8-i_9+i_{10}=0 \;\Rightarrow\; (sC_3)v_8-G_9v_9+G_{10}v_{10}=0$
$\Rightarrow\; (sC_3)(-e_5)-G_9(e_4)+G_{10}(-e_5)=0$

Δηλαδή παίρνουμε τέσσερεις αλγεβρικές εξισώσεις (από τους NPK για τους 4 κόμβους του I-γράφου), με πέντε αγνώστους τις τάσεις e_i (i=1,…,5) που αναφέρονται στους πέντε κόμβους του V-γράφου. Χρειαζόμαστε άλλη μια σχέση, την οποία παίρνουμε από την περιγραφική σχέση της ανεξάρτητης πηγής τάσης (κλάδος 15, $v_{15}=E_s$), και το νόμο τάσεων Kirchhoff στο V-γράφο για τον κλάδο αυτό:

Πηγή τάσης Es : $e_1 = E_s$

Οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου κόμβων με δύο γράφους μπορούν επομένως να γραφούν σε αλγεβρική μορφή ως εξής:

$$\begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ E_s \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \triangle 1 & \triangle 2 & \triangle 3 & \triangle 4 & \triangle 5 \end{array} \\
\underbrace{\begin{bmatrix} -G_1 & G_1+sC_1+sC_2+G_4 & -sC_2 & -sC_1 & 0 \\ 0 & -sC_2 & sC_2+G_7 & -G_7 & 0 \\ 0 & 0 & G_5+G_6 & -G_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_9 & -sC_3-G_{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P(s)}
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_s \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}(s)} \qquad (1)$$

Δηλαδή: $P(s)\cdot\boldsymbol{e}(s) = \boldsymbol{U}(s)$, όπου P(s) η 5x5 μήτρα αγωγιμοτήτων κόμβων, στην παρα-πάνω σχέση (1), $\boldsymbol{e}(s) = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5]^T$, και $\boldsymbol{U}(s) = [0, 0, 0, 0, E_s(s)]^T$.

<u>(β) Να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς: $H(s)=V_o/E_s$</u>

Έχουμε: $\boldsymbol{e}(s) = P^{-1}(s)\cdot \boldsymbol{U}(s) = (1/\Delta(s))\cdot \mathrm{Adj}(P(s))\cdot \boldsymbol{U}(s)$
όπου: $\Delta(s) = \det(P(s))$ (η ορίζουσα της μήτρας αγωγιμοτήτων κόμβων P(s)),
$\mathrm{Adj}(P(s)) = [\mathrm{cofactor}_{ij}(P(s))]^T = [(-1)^{(i+j)}\times \Delta_{ij}(s)]^T$, και
$\Delta_{ij}(s) =$ (μερική ορίζουσα της μήτρας P(s) που προκύπτει από διαγραφή της i γραμμής και j στήλης).
Αλλά: $V_0 = e_5$
οπότε: $V_0(s) = (\Delta_{55}(s)/\Delta(s))\cdot E_s(s) \;\Rightarrow\; H(s) = (\Delta_{55}(s)/\Delta(s))$ (2)

Έχουμε από τη σχέση (1):

$$\Delta(s) = -(G_{10}+sC_3)\Big\{(G_1+G_4+sC_1+sC_2)\big[-G_6(sC_2+\cancel{G_7})+G_7(G_5+\cancel{G_6})\big]+ \\ +sC_2\big[sC_2G_6+sC_1(G_5+G_6)\big]\Big\} \;\Rightarrow$$

$$\Delta(s) = -\left(G_{10}+sC_3\right)\Big\{ \left(G_1+G_4\right)G_5G_7 + s\left(C_1+C_2\right)G_5G_7 - sC_2G_6\left(G_1+G_4\right) + $$
$$- s^2C_2G_6\left(\cancel{C_1}+\cancel{C_2}\right) + s^2C_2\left[\cancel{C_2}G_6 + C_1(G_5+\cancel{G_6})\right]\Big\} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta(s) = -\left(G_{10}+sC_3\right)\Big\{\left(C_1C_2G_5\right)s^2 + s\left[\left(C_1+C_2\right)G_5G_7 - C_2G_6\left(G_1+G_4\right)\right] + \left(G_1+G_4\right)G_5G_7\Big\}$$

και

$$\Delta_{55}(s) = -\left(G_9\right)\left(-G_1\right)\left(-sC_2\right)\left(G_5+G_6\right) = -sG_1G_9C_2\left(G_5+G_6\right)$$

Άρα, η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(s) = \frac{sG_1G_9C_2\left(G_5+G_6\right)}{\left(G_{10}+sC_3\right)\Big\{\left(C_1C_2G_5\right)s^2 + \left[\left(C_1+C_2\right)G_5G_7 - C_2G_6\left(G_1+G_4\right)\right]s + \left(G_1+G_4\right)G_5G_7\Big\}} \qquad (3)$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Εαν ζητείται να μελετηθεί η ευστάθεια του κυκλώματος, μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά μελετώντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος (δηλ. τον παρανομαστή) της συνάρτησης μεταφοράς): ψ(s) = Δ(s),
το οποίο έχει τρείς ρίζες (φυσικές συχνότητες του κυκλώματος):

- $p_1 = -(G_{10}/C_3)$, η οποία είναι *ασυμπτωτικά ευσταθής* (αρνητικός πραγματικός αριθμός, άρα στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο), και
- $p_{2,3}$ δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου:

$$\left(C_1C_2G_5\right)s^2 + \left[\left(C_1+C_2\right)G_5G_7 - C_2G_6\left(G_1+G_4\right)\right]s + \left(G_1+G_4\right)G_5G_7$$

Εφαρμόζοντας για παράδειγμα τη μέθοδο Routh παίρνουμε:

$$\begin{array}{c|ll} s^2 & \left(C_1C_2G_5\right) & \left(G_1+G_4\right)G_5G_7 \\ s^1 & \left[\left(C_1+C_2\right)G_5G_7 - C_2G_6\left(G_1+G_4\right)\right] & 0 \\ s^0 & \left(G_1+G_4\right)G_5G_7 & \end{array}$$

Το κύκλωμα είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές* όταν:

$$\left(C_1+C_2\right)G_5G_7 > C_2G_6\left(G_1+G_4\right)$$

ενώ εκτελεί *ταλαντώσεις* (λειτουργεί ως ταλαντωτής, είναι δηλαδή *οριακά ευσταθές*) όταν:

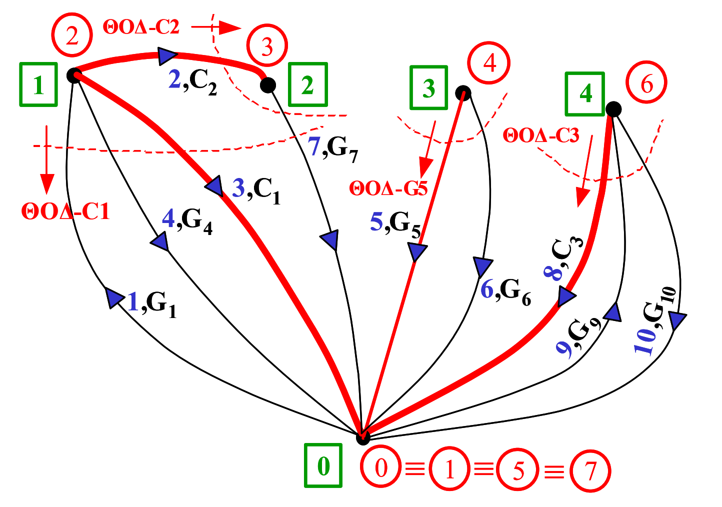
$$\left(C_1+C_2\right)G_5G_7 = C_2G_6\left(G_1+G_4\right)$$

με *συχνότητα ταλαντώσεων* που προκύπτει από τη σχέση:

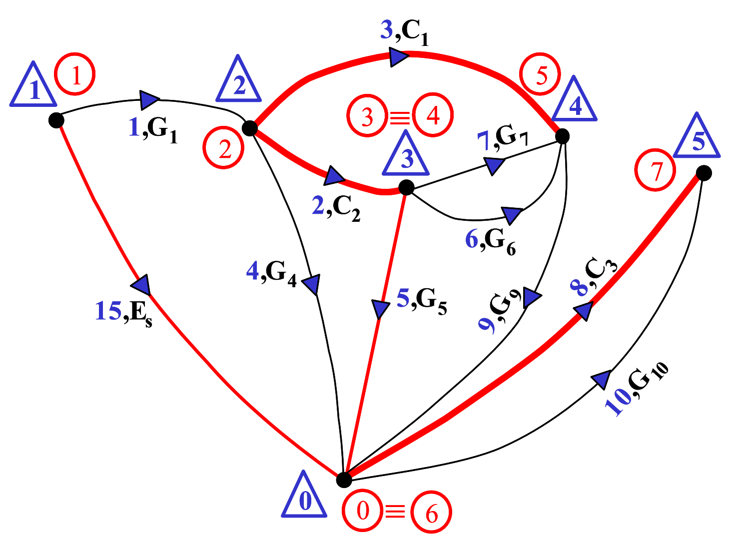
$$\left(C_1C_2\cancel{G_5}\right)s^2 + \left(G_1+G_4\right)\cancel{G_5}G_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\left(G_1+G_4\right)G_7}{C_1C_2}}$$

<u>*(γ) Να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος, λαμβάνοντας σαν μεταβλητές κατάστασης τις τάσεις v_{c1}, v_{c2}, v_{c3} των τριών πυκνωτών.*</u>

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του κανονικού δέντρου (proper tree) (με δύο γράφους), γράφοντας, στην προκειμένη περίπτωση, νόμο ρευμάτων στις θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού του I-γράφου για τους βλαστούς του κανονικού δέντρου που αντιστοιχούν σε πυκνωτές. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται ένα κανονικό δέντρο πάνω στο I- και στο V-γράφο:



Σχήμα 2-1γ: Κανονικό δέντρο πάνω στο Ι-γράφο του κυκλώματος



Σχήμα 2-1δ: Κανονικό δέντρο πάνω στο V-γράφο του κυκλώματος

Οι εξισώσεις ρευμάτων (NPK) στο Ι-γράφο για τις θεμελιώδεις ομάδες διαχωρισμού (ΘΟΔ) που αντιστοιχούν στους κλάδους C_1, C_2, C_3, είναι:

$$\text{Θ.Ο.Δ. - C1:}\quad i_3 - i_1 + i_4 + i_7 = 0 \;\Rightarrow\; (sC_1)v_{c1} = \left(G_1 v_1 - G_4 v_4 - G_7 v_7\right) + C_1 v_{c1}(0) \qquad (4α)$$

$$\text{Θ.Ο.Δ. - C2:}\quad i_2 - i_7 = 0 \;\Rightarrow\; (sC_2)v_{c2} = \left(G_7 v_7\right) + C_2 v_{c2}(0) \qquad (4β)$$

$$\text{Θ.Ο.Δ. - C3:}\quad i_8 - i_9 + i_{10} = 0 \;\Rightarrow\; (sC_3)v_{c3} = \left(G_9 v_9 - G_{10} v_{10}\right) + C_3 v_{c3}(0) \qquad (4γ)$$

Πρέπει επομένως τώρα να εκφράσουμε τις τάσεις κλάδων v_1, v_4, v_7, v_9, και v_{10}, συναρτήσει των τάσεων v_{c1}, v_{c2}, v_{c3}, ώστε να πάρουμε τις σχέσεις στη μορφή των εξισώσεων κατάστασης. Αυτό θα γίνει γράφοντας τις εξισώσεις τάσεων για τους αντίστοιχους θεμελιώδεις βρόχους στο V-γράφο, ως εξής:

$$\text{Θ.Β.}(G_1\text{-}C_2\text{-}G_5\text{-}E_s):\quad v_1 + v_{c2} + v_5 - E_s = 0 \;\Rightarrow\; v_1 = -v_{c2} - v_5 + E_s \qquad (5α)$$

$$\text{Θ.Β.}(G_4\text{-}G_5\text{-}C_2):\quad v_4 - v_5 - v_{c2} = 0 \;\Rightarrow\; v_4 = v_{c2} + v_5 \qquad (5β)$$

$$\text{Θ.Β.}(G_7\text{-}C_1\text{-}C_2):\quad v_7 - v_{c1} + v_{c2} = 0 \;\Rightarrow\; v_7 = v_{c1} - v_{c2} \qquad (5γ)$$

$$\text{Θ.Β.}(G_6\text{-}C_1\text{-}C_2):\quad v_6 - v_{c1} + v_{c2} = 0 \;\Rightarrow\; v_6 = v_{c1} - v_{c2}\ (\text{δηλ. } v_6 = v_7) \qquad (5δ)$$

$$\text{Θ.Β.}(G_9\text{-}G_5\text{-}C_2\text{-}C_1):\quad v_9 - v_5 - v_{c2} + v_{c1} = 0 \;\Rightarrow\; v_9 = -v_{c1} + v_{c2} + v_5 \qquad (5ε)$$

$$\text{Θ.Β.}(G_{10}\text{-}C_3):\quad v_{10} - v_{c3} = 0 \;\Rightarrow\; v_{10} = v_{c3} \qquad (5στ)$$

Επιπλέον, από το NPK για τη ΘΟΔ-G5 στο Ι-γράφο παίρνουμε:

$$i_5 + i_6 = 0 \;\Rightarrow\; i_5 = -i_6 \;\Rightarrow\; G_5 v_5 = -G_6 v_6 \;\overset{(5\delta)}{\Rightarrow}\; v_5 = \left(\frac{-G_6}{G_5}\right)\left(v_{c1} - v_{c2}\right) \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας την (6) στις (5α)-(5στ) και εν συνεχεία στις (4α)-(4γ) παίρνουμε τις τελευταίες στη μορφή των εξισώσεων κατάστασης:

$$(sC_1)v_{c1} = G_1\left(-v_{c2} + \frac{G_6}{G_5}\left(v_{c1} - v_{c2}\right) + E_s\right) - G_4\left(v_{c2} - \frac{G_6}{G_5}\left(v_{c1} - v_{c2}\right)\right) - G_7\left(v_{c1} - v_{c2}\right) + C_1 v_{c1}(0) \;\Rightarrow$$

$$\boxed{s\,v_{c1} = \left(\frac{1}{C_1}\right)\left\{\left[\frac{G_6}{G_5}\left(G_1 + G_4\right) - G_7\right]v_{c1} - \left[\left(1 + \frac{G_6}{G_5}\right)\left(G_1 + G_4\right) - G_7\right]v_{c2}\right\} + \left(\frac{G_1}{C_1}\right)E_s + v_{c1}(0) \qquad (7α)}$$

$$(sC_2)v_{c2} = G_7\left(v_{c1} - v_{c2}\right) + C_2 v_{c2}(0) \quad \Rightarrow \quad s\,v_{c2} = \left(\frac{G_7}{C_2}\right)\left(v_{c1} - v_{c2}\right) + C_2 v_{c2}(0) \qquad (7\beta)$$

και: $$(sC_3)v_{c3} = G_9\left(-v_{c1} + v_{c2} - \frac{G_6}{G_5}\left(v_{c1} - v_{c2}\right)\right) - G_{10}\left(v_{c3}\right) + C_3 v_{c3}(0) \Rightarrow$$

$$s\,v_{c3} = \left(\frac{1}{C_3}\right)\left\{\left[-G_9\left(1+\frac{G_6}{G_5}\right)\right]v_{c1} + \left[G_9\left(1+\frac{G_6}{G_5}\right)\right]v_{c2} - G_{10}v_{c3}\right\} + v_{c3}(0) \qquad (7\gamma)$$

Άρα οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος είναι:

$$\begin{bmatrix} s\,v_{c1} \\ s\,v_{c2} \\ s\,v_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{C_1}\right)\left[\frac{G_6}{G_5}\left(G_1+G_4\right)-G_7\right] & -\left(\frac{1}{C_1}\right)\left[\left(1+\frac{G_6}{G_5}\right)\left(G_1+G_4\right)-G_7\right] & 0 \\ \left(\frac{G_7}{C_2}\right) & -\left(\frac{G_7}{C_2}\right) & 0 \\ -\left(\frac{1}{C_3}\right)\left[G_9\left(1+\frac{G_6}{G_5}\right)\right] & \left(\frac{1}{C_3}\right)\left[G_9\left(1+\frac{G_6}{G_5}\right)\right] & -\left(\frac{G_{10}}{C_3}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{G_1}{C_1}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E_s + \begin{bmatrix} v_{c1}(0) \\ v_{c2}(0) \\ v_{c3}(0) \end{bmatrix} \qquad (8)$$

δηλαδή: $s\,\boldsymbol{v}_c = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v}_c + \mathbf{B} \cdot E_s + \boldsymbol{v}_c(0)$ (8α)
όπου:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{C_1}\right)\left[\frac{G_6}{G_5}\left(G_1+G_4\right)-G_7\right] & -\left(\frac{1}{C_1}\right)\left[\left(1+\frac{G_6}{G_5}\right)\left(G_1+G_4\right)-G_7\right] & 0 \\ \left(\frac{G_7}{C_2}\right) & -\left(\frac{G_7}{C_2}\right) & 0 \\ -\left(\frac{1}{C_3}\right)\left[G_9\left(1+\frac{G_6}{G_5}\right)\right] & \left(\frac{1}{C_3}\right)\left[G_9\left(1+\frac{G_6}{G_5}\right)\right] & -\left(\frac{G_{10}}{C_3}\right) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left(\frac{G_1}{C_1}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και
$y = v_o = e_7 = -v_{c3} = [0 \;\; 0 \;\; -1] \cdot \boldsymbol{v}_c$, δηλαδή
$y = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{v}_c + D \cdot E_s$, με $C = [0 \;\; 0 \;\; -1]$ και $D=0$ (8β)

(δ) Έστω: $C_1=C_2=C_3=1F$, $G_1=G_4=0.5\Omega^{-1}$, $G_5=G_6=G_7=G_9=G_{10}=1\Omega^{-1}$

(i) <u>Αν $E_s(t)$ είναι η βηματική συνάρτηση 1(t) και $v_{c1}(0)=v_{c2}(0)=v_{c3}(0)=0$, να ευρεθεί η βηματική απόκριση του κυκλώματος.</u>

Για την απόκριση μηδενικής κατάστασης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) (συνάρτηση μεταφοράς H(s)) και να γράψουμε:

$V_o(s) = H(s)\cdot E_s(s)$, όπου $E_s(s) = \mathcal{L}\{\boldsymbol{1}(t)\} = (1/s)$, οπότε έχουμε (αντικαθιστώντας τις δοσμένες τιμές για τα στοιχεία του κυκλώματος στη σχέση (3)):

$$V_o(s) = \mathcal{L}\{v_o(t)\} = \frac{1}{(s+1)\{s^2+s+1\}} = \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2 s + k_3}{(s^2+s+1)} \tag{9}$$

Αναπτύσσοντας τον αριθμητή της (3) βρίσκουμε τους (πραγματικούς) συντελεστές των μερικών κλασμάτων:

(αριθμητής της (3)) = $(k_1+k_2)s^2 + (k_1+k_2+k_3)s + (k_1+k_3) = s^2 + s + 1$

οπότε:

$k_1+k_2=0$, $k_1+k_2+k_3=0$ (άρα $k_3=0$) και $k_1+k_3=1$

Επομένως:

$k_1=1$, $k_2=-1$, και $k_3=0$

Η (9) συνεπώς γράφεται:

$$V_o(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{-s}{(s^2+s+1)} = \frac{1}{(s+1)} + \frac{-s}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{(s+1)} - \left[\frac{(s+\frac{1}{2})}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right] + \left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right] =$$

$$= \frac{1}{(s+1)} - \left[\frac{(s+\frac{1}{2})}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right] + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]$$

Άρα, η ζητούμενη βηματική απόκριση του κυκλώματος είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} v_o(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{V_o(s)\} = e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)e^{-\frac{t}{2}}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) \\ &= e^{-t} - k\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t+\phi) \\ \text{όπου: } k &= \sqrt{1^2+(-\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{1+\tfrac{1}{3}} = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{και} \quad \phi = \operatorname{atan2}\left(\frac{-(-\frac{1}{\sqrt{3}})}{1}\right) = 30^o \end{aligned}} \tag{10}$$

(ii) <u>*Αν $E_s(t)=0$, να ευρεθεί η απόκριση μηδενικής εισόδου του κυκλώματος με: $v_{c1}(0)=v_{c2}(0)=0$, και $v_{c3}(0)= v_{30}=2V$*</u>

Από τη σχέση (8β), για την ελεύθερη απόκριση του κυκλώματος εκφρασμένη στο χώρο κατάστασης, παίρνουμε (θεωρώντας $E_s(t)=0$, δηλαδή απόκριση μηδενικής εισόδου y_{zi} - zero input response):

$$y_{zi} = \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{v}_c = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\end{bmatrix}\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]^{-1}\boldsymbol{v}_c(0) \quad \text{με} \quad \boldsymbol{v}_c(0) = [0\ \ 0\ \ 2]^T \tag{11}$$

Θέτοντας τις δοσμένες τιμές των στοιχείων του κυκλώματος παίρνουμε, από τη σχέση (8), για τη μήτρα $\mathbf{A}$ του χώρου κατάστασης:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix}s & 1 & 0\\ -1 & s+1 & 0\\ 2 & -2 & s+1\end{bmatrix}$$

$\Delta = \det\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right] = s(s+1)^2 + (s+1) = (s+1)(s^2+s+1)$ (δηλαδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο στο οποίο είχαμε καταλήξει και στο ερώτημα δ(i).

Επίσης: $\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]^{-1} = \dfrac{\left[\mathrm{Adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\right]}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} = (1/\Delta)\left[\Delta'_{ij}\right]$ όπου

$\Delta'_{ij} = (-1)^{(i+j)} \times \Delta_{ji} = (-1)^{(i+j)} \times$ (μερική ορίζουσα της μήτρας $\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]$ που προκύπτει από διαγραφή της j γραμμής και i στήλης αυτής)

Από τη σχέση (11) επομένως παίρνουμε για τη ζητούμενη απόκριση μηδενικής εισόδου:

$$y_{zi} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{v}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\left[\Delta'_{ij}\right]}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-2\Delta'_{33}}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{-2[s(s+1)+1]}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{-2}{(s+1)}$$

Άρα η ζητούμενη ελεύθερη απόκριση είναι: $y_{zi}(t) = -2e^{-t}$

(ε) Για τις παραπάνω τιμές στοιχείων, να σχεδιαστεί το διάγραμμα Bode κέρδους της H(s).

Από το ερώτημα δ(i), έχουμε υπολογίσει τη συνάρτηση μεταφοράς H(s) για τις δοσμένες τιμές των στοιχείων του κυκλώματος:

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+s+1)} \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega+1)((j\omega)^2+j\omega+1)}$$

s: κλίση ασυμπτωτικής ($\omega \rightarrow \infty$): +20db/dec
(s+1): σημείο θλάσης για ω=1, κλίση ασυμπτωτικής ($\omega \rightarrow \infty$): -20db/dec
(s^2+s+1): ζ=1/2, ω_0=1, σημείο θλάσης για ω_0=1,
κλίση ασυμπτωτικής ($\omega \rightarrow \infty$): -40db/dec

Το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα: