Επαναληπτική Εξέταση στο Μάθημα: "ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΚΤΥΩΝ" (5^{o} εξάμηνο)

(Διάρκεια: 3 ώρες) **Ημερομηνία:** 20 Σεπτεμβρίου 2004

ΟΜΑΔΑ Α

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:________________________________

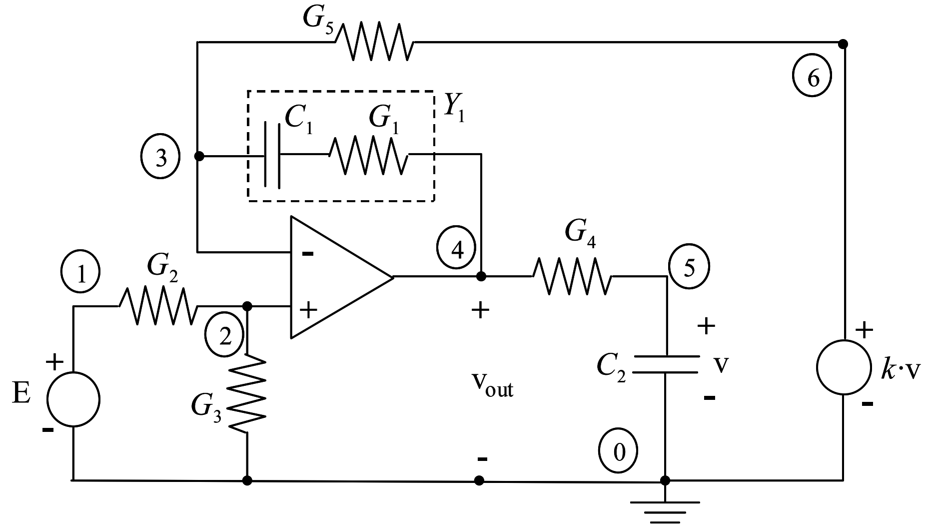
(Το παρόν επιστρέφεται)

Παρατηρήσεις: - Να γράψετε τον αριθμό των διφύλλων που παραδίδετε
- Να γράψετε το όνομά σας σε κάθε δίφυλλο που παραδίδετε

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θέμα 1 (35%)

Για το κύκλωμα του Σχήματος



α. (10%) Να γραφούν οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου κόμβων με χρήση δύο γράφων.

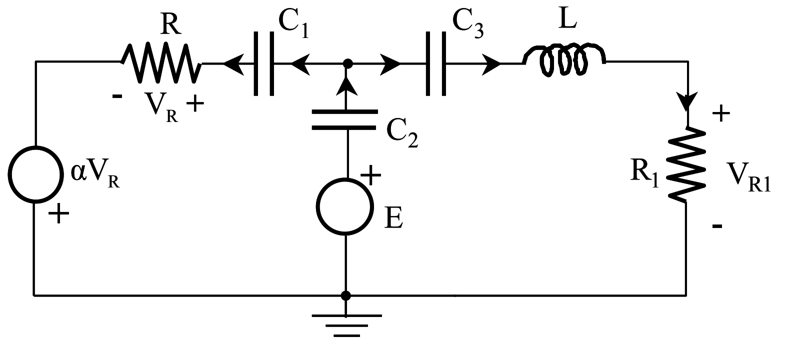
β. (10%) Να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=V_{out}(s)/E(s)$.

γ. (10%) Ας είναι $G_1=2\Omega^{-1}$, $G_2=G_3=G_4=G_5=1\Omega^{-1}$, $C_1=C_2=1F$. Το κύκλωμα διεγείρεται με ημιτονική πηγή τάσης $E(t)=20ημ(4t)$ και παρατηρείται πώς μεταβάλλεται η απόκριση $V_{out}^{ΗΜΚ}(t)$ του κυκλώματος στην ημιτονική μόνιμη κατάσταση όταν μεταβάλλεται το κέρδος k της εξαρτημένης πηγής. Να ευρεθεί η τιμή του κέρδους k έτσι ώστε το πλάτος της απόκρισης $V_{out}^{ΗΜΚ}(t)$ να μεγιστοποιείται (ως προς k).

δ. (5%) Αν $k=1.6$ και οι τιμές των άλλων στοιχείων είναι όπως στο προηγούμενο ερώτημα, να ευρεθεί η απόκριση $V_{out}(t)$ του κυκλώματος στη διέγερση $E(t)=e^{-t}$.

Θέμα 2 (40%)

Για το κύκλωμα του Σχήματος



α. Εάν $\alpha \neq 1$, να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς διάνυσμα καταστάσεων

$$[v_{C_1}(t), v_{C_2}(t), v_{C_3}(t), i_L(t)]^T$$

και απόκριση την τάση κατά μήκος της αντίστασης R_1.

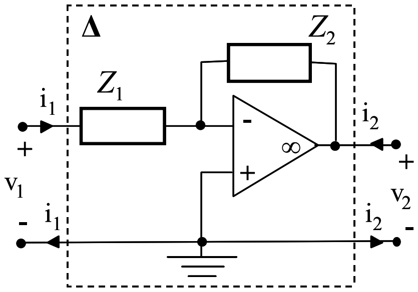
β. Εάν οι τιμές των πυκνωτών είναι 1F, του επαγωγέα 1H και των αντιστάσεων 1Ω, να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s)=\frac{V_{R_1}(s)}{E(s)}$$

γ. Να ευρεθούν οι τιμές του κέρδους της εξαρτημένης πηγής α για τις οποίες η περιγραφή του συστήματος είναι ευσταθής.

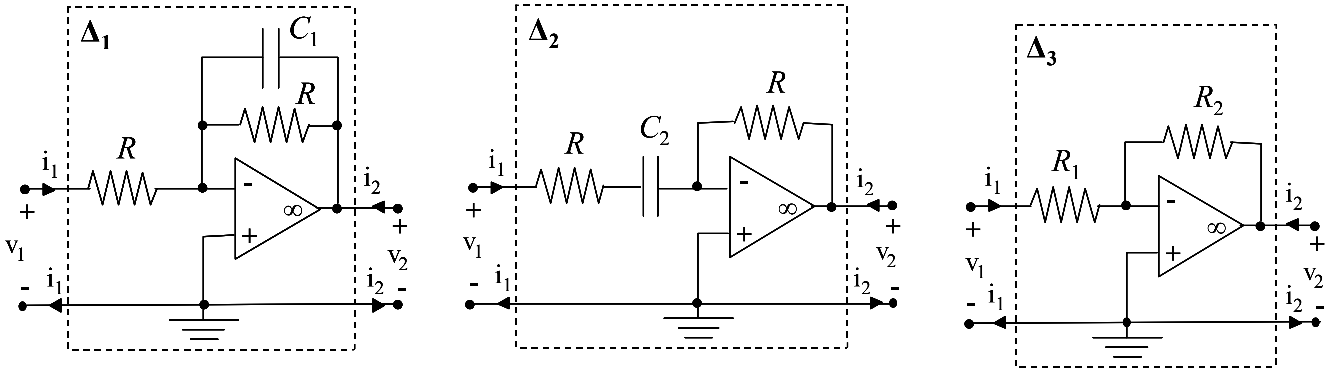
δ. Εάν $\alpha=1$, να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος. Να σχολιάσετε την τάξη της περιγραφής και τη μορφή του νέου διανύσματος καταστάσεως.

<u>Θέμα 3</u> (30%)



α. (5%) Για το δίθυρο Δ του διπλανού Σχήματος, να ευρεθεί η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς T και η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=V_2(s)/V_1(s)$, συναρτήσει των συνθέτων αντιστάσεων Z_1 και Z_2 του σχήματος.

β. (10%) Για τα δίθυρα Δ_1, Δ_2 και Δ_3 του παρακάτω Σχήματος, να ευρεθούν οι μήτρες παραμέτρων μεταφοράς T_i και οι αντίστοιχες συναρτήσεις μεταφοράς $H_i(s)$ (i=1,…,3). Να χαρακτηριστεί η λειτουργία καθενός από τα δίθυρα αυτά.



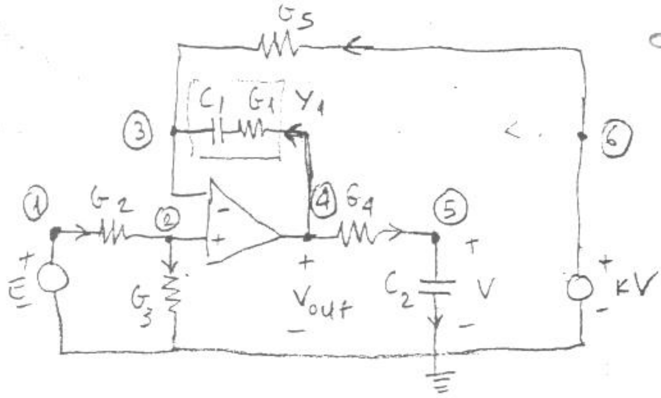
γ. (10%) Να σχεδιασθεί το δίθυρο Δ' που προκύπτει με αλυσωτή σύνδεση των Δ_1, Δ_2 και Δ_3 (με τη σειρά $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \Delta_3$). Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος, να ευρεθεί η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς T' αυτού, καθώς και η συνάρτηση μεταφοράς $H'(s)=V_{out}(s)/V_{in}(s)$ (όπου V_{out} η τάση εξόδου του Δ_3 και V_{in} η τάση εισόδου του Δ_1).

δ. (5%) Εαν υποθέσουμε ότι $C_1<C_2$, να σχεδιαστεί προσεγγιστικά η μορφή που θα έχει το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους της $H'(s)$ και να χαρακτηριστεί η λειτουργία του συνολικού διθύρου Δ'.

2

A

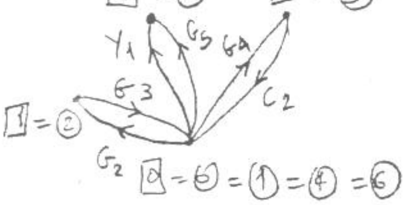
1ο θέμα



(α) I-γράφος

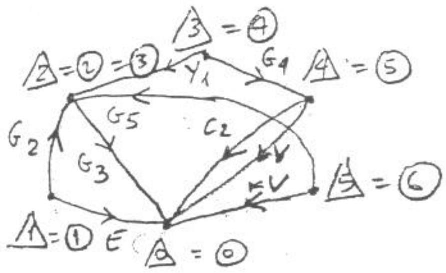
⓪ = ① = ④ = ⑥

[2] = ③   [3] = ⑤



V-γράφος

② = ③



$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \triangle 1 & \triangle 2 & \triangle 3 & \triangle 4 & \triangle 5 \\
\hline
\boxed{1} & -G_2 & G_2+G_3 & 0 & 0 & 0 \\
\boxed{2} & 0 & Y_1+G_5 & -Y_1 & 0 & -G_5 \\
\boxed{3} & 0 & 0 & -G_4 & G_4+sC_2 & 0 \\
kV & 0 & 0 & 0 & -k & 1 \\
E & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\begin{bmatrix} V_{\triangle 1} \\ V_{\triangle 2} \\ V_{\triangle 3} \\ V_{\triangle 4} \\ V_{\triangle 5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}
$$

(b)

$$\Delta(s) = (G_2+G_3)\left[-Y_1(sC_2+G_4)+G_4(-kG_5)\right]$$

$$= -(G_2+G_3)\left[sC_2Y_1 + Y_1G_4 + kG_4G_5\right]$$

$$\frac{1}{Y_1} = \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{G_1} = \frac{sC_1+G_1}{sC_1G_1} \Rightarrow Y_1 = \frac{sC_1G_1}{sC_1+G_1}$$

$$\Delta(s) = -\frac{(G_2+G_3)}{sC_1+G_1}\left[s^2C_1C_2G_1 + sC_1G_1G_4 + sC_1kG_4G_5 + kG_1G_4G_5\right]$$

$$= -\frac{(G_2+G_3)}{sC_1+G_1}\left[s^2C_1C_2G_1 + sC_1G_4(G_1+kG_5) + kG_1G_4G_5\right]$$

$$\Delta_{\triangle 3}(s) = E(-G_2)(Y_1+G_5)(sC_2+G_4) = -\frac{EG_2}{sC_1+G_1}\left(sC_1G_1+(sC_1+G_1)G_5\right)(sC_2+G_4)$$

$$= -\frac{EG_2}{sC_1+G_1}\left(sC_1(G_1+G_5)+G_1G_5\right)(sC_2+G_4)$$

$$G(s) = \frac{V_{out}}{E} = \frac{V_{④}}{E} = \frac{V_{③}}{E} = \frac{\Delta_{③}(s)}{E\,\Delta(s)} =$$

$$= \frac{\cancel{k}\cancel{E}\, G_2\left[sC_1(G_1+G_5)+G_1G_5\right](sC_2+G_4)}{\cancel{k}\cancel{E}\,(G_2+G_3)\left[s^2C_1C_2G_1+s\,C_1G_4(G_1+kG_5)+k\,G_1G_4G_5\right]}$$

(γ) Ας είναι $G_1 = 2\,\Omega^{-1}$, $G_2=G_3=G_4=G_5=1\,\Omega^{-1}$, $C_1=C_2=1F$.
Το κύκλωμα διεγείρεται με ημιτονική πηγή τάσης $E(t) = 20\,\eta\mu(4t)$ και παρατηρείται πώς ~~η~~ μεταβάλλεται η απόκριση $V_{out}^{HMK}(t)$ του κυκλώματος στην ημιτονική μόνιμη κατάσταση όταν μεταβάλλεται το κέρδος k της εξαρτημένης πηγής. Να ευρεθεί η τιμή του κέρδους k έτσι ώστε το πλάτος της απόκρισης $V_{out}^{HMK}(t)$ να μεγιστοποιείται (ως προς k).

$$G(s) = \frac{(3s+2)(s+1)}{2\left[2s^2+s(k+2)+2k\right]}$$

$$V_{out}^{HMK}(t) = |\bar{V}|\,\eta\mu\,(4t+\arg(\bar{V}))$$

όπου $$\bar{V} = |E|\,G(j\omega) = 20\,G(j4) = \frac{20\,(12j+2)(4j+1)}{2\left(-32+4(k+2)j+2k\right)}$$

$$|\bar{V}| = \frac{10\,|12j+2|\,|4j+1|}{|2k-32+4(k+2)j|}$$

Το πλάτος γίνεται μέγιστο όταν ο παρονομαστής γίνει ελάχιστος (διότι ο αριθμητής δεν εξαρτάται από το k), επομένως:

$$\min_k \{\underbrace{(2k-32)^2+16(k+2)^2}_{\Pi(k)}\}$$

$$\frac{d\Pi(k)}{dk} = 2(2k-32)2+32(k+2).$$

Το ζητούμενο k ευρίσκεται από $\frac{d\Pi(k)}{dk}=0$, δηλαδή

$$4(2k-32)+32(k+2)=0 \iff 8k-128+32k+64=0$$

$$\Rightarrow 40k=64 \Rightarrow k=\frac{64}{40}=\frac{16}{10}=1.6$$

10) Αν $K=1.6$ και οι τιμές των στοιχείων όπως στο προηγούμενο ερώτημα, να βρεθεί η απόκριση $V_{out}(t)$ του κυκλώματος στη διέγερση $E(t) = e^{-t}$.

$$V_{out}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)E(s)\right\},$$

$$E(s) = \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} = \frac{1}{s+1}$$

$$G(s)E(s) = \frac{(3s+2)(s+1)}{2(2s^2+3.6s+3.2)}\cdot\frac{1}{(s+1)} = \frac{3s+2}{2(2s^2+3.6s+3.2)}$$

$$V_{out}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{2(2s^2+3.6s+3.2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{4}\,\frac{s+2/3}{s^2+1.8s+1.6}\right\}$$

$$= \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2/3}{(s+0.9)^2+1.6-0.81}\right\} =$$

$$= \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+0.6667}{(s+0.9)^2+(0.8889)^2}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{(0.6667-0.9)^2+0.79}}{0.8889}\, e^{-0.9t}\sin\left(0.8889t+\arctan\left\{\frac{0.8889}{0.6667-0.9}\right\}\right),$$

$$= \cancel{1.0338\, e^{-0.9t}\sin(0.8889t-1.3142)}$$

rad. : rad

$$= 0.77535\, e^{-0.9t}\sin(0.8889t-3.8092)$$

(α) $\left.\begin{array}{l} V_1 - i_1 Z_1 = 0 \\ V_2 + i_1 Z_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_1 = Z_1 \cdot i_1 \\ i_1 = -\frac{1}{Z_2} V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_1 = -\frac{Z_1}{Z_2} V_2 \\ i_1 = -\frac{1}{Z_2} \cdot V_2 \end{array}\right\}$ | Σεπ. 20.. Θέμα

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -Z_1/Z_2 & 0 \\ -1/Z_2 & 0 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} V_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} \quad (*), \qquad T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A = -Z_1/Z_2, \quad C = -1/Z_2$$

$$\Rightarrow H = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L}{B + A Z_L} \xrightarrow{Z_L \to \infty} \frac{1}{A} \Rightarrow \boxed{H(s) = -\frac{Z_2}{Z_1}} \quad (*)$$

(β) • Δ_1: $Z_1 = R$, $Z_2 = \dfrac{R \cdot \frac{1}{sC_1}}{R + \frac{1}{sC_1}} = \dfrac{R}{1 + sRC_1}$

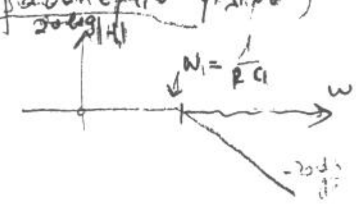
$T_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$, $B_1 = D_1 = 0$

$A_1 = -\dfrac{Z_1}{Z_2} = -\dfrac{R}{\frac{R}{1+sRC_1}} = -(1+sRC_1)$

$C_1 = -\dfrac{1}{Z_2} = -\dfrac{1+sRC_1}{R}$

$$\Rightarrow \text{Άρα:} \quad (*) \; T_1 = \begin{bmatrix} -(1+sRC_1) & 0 \\ -\frac{(1+sRC_1)}{R} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{H_1(s) = -\frac{1}{1+sRC_1}}$$

(Βαθυπερατό φίλτρο)

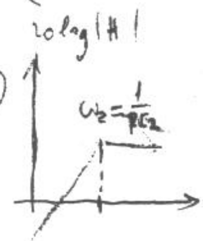


• Δ_2: $Z_1 = R + \dfrac{1}{sC_2} = \dfrac{1 + sRC_2}{sC_2}$, $Z_2 = R$

(υψηπερατό φίλτρο)

$$(*) \; T_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1+sRC_2}{sRC_2} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{H_2(s) = -\frac{sRC_2}{1+sRC_2}} \quad (*)$$

(υψιπερατό)



• Δ_3: $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$

$$(*) \; T_3 = \begin{bmatrix} -R_1/R_2 & 0 \\ -1/R_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{H_3(s) = -\frac{R_2}{R_1}} \quad (*)$$

(αναστρέφων ενισχυτής)

(γ)

$$\circ - \boxed{\Delta_1} - \boxed{\Delta_2} - \boxed{\Delta_3} - \circ$$

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix} =$$

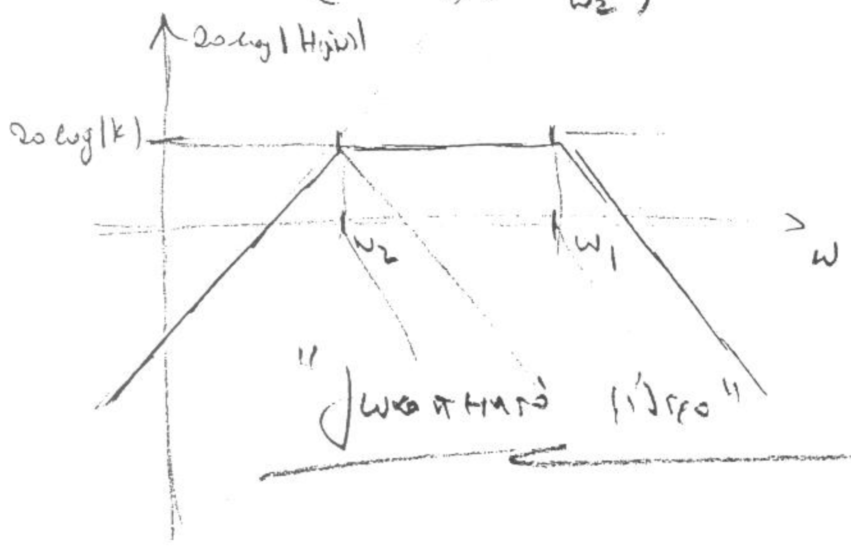
$$= \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_2 & 0 \\ C_1 \cdot A_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 & 0 \\ C_1 A_2 A_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = -(1+sRC_1)\,\dfrac{(1+sRC_2)}{sRC_2} \cdot \dfrac{R_1}{R_2} = -\dfrac{(1+sRC_1)(1+sRC_2)}{sRC_2}\,\dfrac{R_1}{R_2} \\ C = C_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = -\dfrac{1+sRC_1}{R} \cdot \dfrac{1+sRC_2}{sRC_2}\,\dfrac{R_1}{R_2} = -\dfrac{R_1}{R_2} \cdot \dfrac{(1+sRC_1)(1+sRC_2)}{R\;sRC_2} \end{cases}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{A} = -\underbrace{\frac{R_2}{R_1}}_{k}\,\frac{sRC_2}{(1+sRC_1)(1+sRC_2)}}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{RC_1} \\ \omega_2 &= \frac{1}{RC_2} \end{aligned}\right\} \overset{C_1 < C_2}{\Longrightarrow} \omega_1 > \omega_2$$

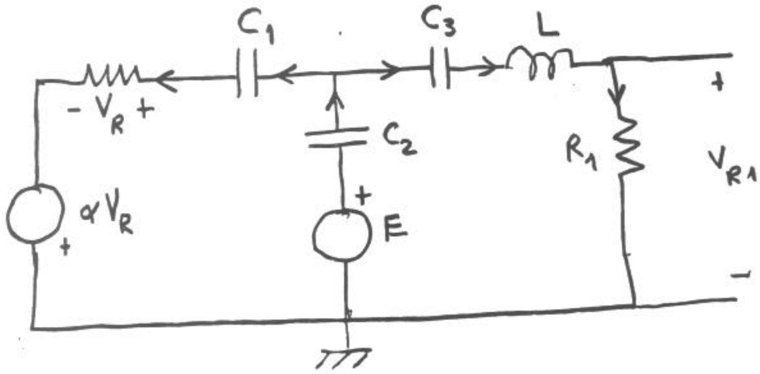
$$H(s) = -k \cdot \frac{s/\omega_2}{\left(1+s/\omega_1\right)\left(1+\frac{s}{\omega_2}\right)} \qquad k = \frac{R_2}{R_1}$$



(1

ΟΜΑΔΑ Α

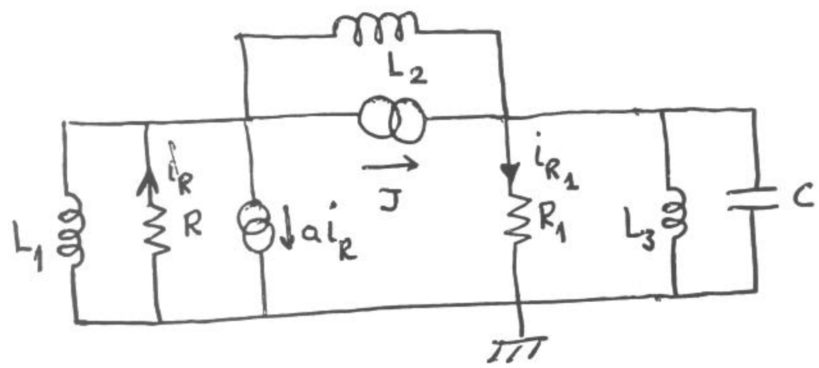
Για το κύκλωμα του Σχήματος



1. Εάν α≠1, να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς διάνυσμα καταστάσεων
$$[v_{C_1}(t), v_{C_2}(t), v_{C_3}(t), i_L(t)]^T$$
και απόκριση την τάση κατά μήκος της αντίστασης R_1.
2. Εάν οι τιμές των πυκνωτών είναι 1F, του επαγωγέα 1H και των αντιστάσεων 1Ω, να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς
$$G(s)=\frac{V_{R_1}(s)}{E(s)}$$
3. Να ευρεθούν οι τιμές του κέρδους της εξαρτημένης πηγής α για τις οποίες η περιγραφή του συστήματος είναι ευσταθής.
4. Εάν α=1, να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος. Να σχολιάσετε την τάξη της περιγραφής και τη μορφή του νέου διανύσματος καταστάσεως.

ΟΜΑΔΑ Β

Για το κύκλωμα του Σχήματος



1. Εάν α≠1, να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς διάνυσμα καταστάσεων

$$[i_{L_1}(t), i_{L_2}(t), i_{L_3}(t), v_C(t)]^T$$

και απόκριση την ένταση δια μέσου της αντίστασης R_1.

2. Εάν οι τιμές του πυκνωτή είναι 1F, των επαγωγέων 1H και των αντιστάσεων 1Ω, να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s)=\frac{I_{R_1}(s)}{J(s)}$$

3. Να ευρεθούν οι τιμές του κέρδους της εξαρτημένης πηγής α για τις οποίες η περιγραφή του συστήματος είναι ευσταθής.

4. Εάν α=1, να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος. Να σχολιάσετε την τάξη της περιγραφής και τη μορφή του νέου διανύσματος καταστάσεως.

1.

Εφαρμόζοντας ΝΤΚ στο βρόχο των στοιχείων E, C_2, C_1, R, Εξαρτμένη Πηγή, λαμβάνεται.

$$v_{C_1}(t)+v_{C_2}(t)+v_R(t)-\alpha v_R(t)-E=0 \quad (1)$$

ή

$$(1-\alpha)v_R(t)=E-v_{C_1}(t)-v_{C_2}(t) \quad (2)$$

Καθώς

$$v_R(t)=Ri_R=Ri_{C_1}=RC_1\frac{dv_{C_1}}{dt} \quad (3)$$

από τη σχέση (2) λαμβάνεται

$$(1-\alpha)RC_1\frac{dv_{C_1}}{dt}=-v_{C_1}(t)-v_{C_2}(t)+E \quad (3)$$

ή

$$\boxed{\frac{dv_{C_1}}{dt}=-\frac{1}{(1-\alpha)RC_1}v_{C_1}(t)-\frac{1}{(1-\alpha)RC_1}v_{C_2}(t)+\frac{1}{(1-\alpha)RC_1}E} \quad (5)$$

Εφαρμόζοντας ΝΤΚ στο βρόχο των στοιχείων E, C_2, C_3, L, R_1, λαμβάνεται.

$$v_{C_3}(t)+v_{C_2}(t)+v_{R_1}(t)+v_L(t)-E=0 \quad (6)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$v_L(t)=L\frac{di_L}{dt} \quad (7)$$

$$v_{R_1}(t)=R_1 i_L(t) \quad (8)$$

η σχέση (6) γράφεται

$$L\frac{di_L}{dt}=-v_{C_3}(t)-v_{C_2}(t)-R_1 i_L(t)+E \quad (9)$$

ή

$$\boxed{\frac{di_L}{dt}=-\frac{1}{L}v_{C_3}(t)-\frac{1}{L}v_{C_2}(t)-\frac{R_1}{L}i_L(t)+\frac{1}{L}E} \quad (10)$$

Καθώς οι εντάσεις των στοιχείων L, C_2 ταυτίζονται, θα είναι

$$i_L=C_3\frac{dv_{C_3}}{dt} \quad (11)$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{dv_{C_3}}{dt}=\frac{i_L}{C_3}} \quad (12)$$

Εφαρμόζοντας NPK στον κόμβο των ακροδεκτών των στοιχείων C_1, C_2, C_3, θα είναι

$$i_{C_1}+i_{C_3}=C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}+C_3\frac{dv_{C_3}}{dt}=i_{C_2}=C_2\frac{dv_{C_2}}{dt} \tag{13}$$

Συνδυάζοντας τις (5) και (13) λαμβάνεται

$$\boxed{\frac{dv_{C_2}}{dt}=\frac{1}{C_2}i_L+-\frac{1}{(1-\alpha)RC_2}v_{C_1}(t)-\frac{1}{(1-\alpha)RC_2}v_{C_2}(t)+\frac{1}{(1-\alpha)RC_2}E} \tag{14}$$

Η απόκριση του συστήματος είναι

$$\boxed{y=v_{R_1}(t)=R_1 i_L(t)} \tag{15}$$

Οι εξισώσεις (5), (10), (12), (14) και (15) αποτελούν τις εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος, οι οποίες γράφονται σε μητρική μορφή ως εξής.

$$\boxed{\begin{gathered}
\begin{bmatrix}\frac{dv_{C_1}}{dt}\\ \frac{dv_{C_2}}{dt}\\ \frac{dv_{C_3}}{dt}\\ \frac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{(1-\alpha)RC_1} & -\frac{1}{(1-\alpha)RC_1} & 0 & 0\\ -\frac{1}{(1-\alpha)RC_2} & -\frac{1}{(1-\alpha)RC_2} & 0 & \frac{1}{C_2}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3}\\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}(t)\\ v_{C_2}(t)\\ v_{C_3}(t)\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{(1-\alpha)RC_1}\\ \frac{1}{(1-\alpha)RC_2}\\ 0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}E\\
y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & R_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}(t)\\ v_{C_2}(t)\\ v_{C_3}(t)\\ i_L\end{bmatrix}
\end{gathered}} \tag{16}$$

2.
Εάν τεθεί β=1/(1-α), για μοναδιαίες τιμές των στοιχείων οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος γίνονται

$$\dot{\underline{x}}=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ v_{C_3}(t) \\ i_L \end{bmatrix}=A\underline{x}+Bu=\begin{bmatrix} -\beta & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & -\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ v_{C_3}(t) \\ i_L \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}E$$

$$y=C\underline{x}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ v_{C_3}(t) \\ i_L \end{bmatrix} \tag{17}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$G(s)=C[sI-A]^{-1}B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+\beta & \beta & 0 & 0 \\ \beta & s+\beta & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 1 & 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Από τη Σχέση (18) προκύπτει ότι χρειάζεται ο υπολογισμός μόνο των στοιχείων (4,1), (4,2) και (4,4) της μήτρας $[sI-A]^{-1}$. Θα είναι

$$\psi(s)=\det\begin{bmatrix} s+\beta & \beta & 0 & 0 \\ \beta & s+\beta & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 1 & 1 & s+1 \end{bmatrix}=(s+\beta)\begin{vmatrix} s+\beta & 0 & -1 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 1 & s+1 \end{vmatrix}-\beta\begin{vmatrix} \beta & 0 & -1 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 1 & s+1 \end{vmatrix}= \tag{19}$$

$$=(s+\beta)[(s+\beta)(s^2+s+1)+s]-\beta^2(s^2+s+1)=s^4+(1+2\beta)s^3+(2+2\beta)s^2+3\beta s$$

$$\text{Στοιχείο (4,1)}=(-1)^{4+1}\frac{\begin{vmatrix} \beta & s+\beta & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\psi(s)}=\frac{\beta s}{\psi(s)} \tag{20α}$$

$$\text{Στοιχείο (4,2)}=(-1)^{4+2}\frac{\begin{vmatrix} s+\beta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\psi(s)}=-\frac{s^2+\beta s}{\psi(s)} \tag{20β}$$

$$\text{Στοιχείο (4,4)}=(-1)^{4+4}\frac{\begin{vmatrix} s+\beta & \beta & 0 \\ \beta & s+\beta & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix}}{\psi(s)}=\frac{s^3+2\beta s^2}{\psi(s)} \tag{20γ}$$

Συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$G(s)=\beta\frac{\beta s}{\psi(s)}+\beta\left(-\frac{s^2+\beta s}{\psi(s)}\right)+\frac{s^3+2\beta s^2}{\psi(s)}=\frac{s^3+\beta s^2}{\psi(s)}=\frac{s^2+\beta s}{s^3+(1+2\beta)s^2+(2+2\beta)s+3\beta} \qquad (21)$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι υπάρχει κοινός παράγοντας (το s) μεταξύ των πολυωνύμω του αριθμητή και του παρονομαστή και συνεπώς η περιγραφή του συστήματος είναι μη ελέγξιμη ή μη παρατηρήσιμη ή ταυτόχρονα μη ελέγξιμη και μη παρατηρήσιμη.

3.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής του συστήματος είναι

$$\psi(s)=s^4+(1+2\beta)s^3+(2+2\beta)s^2+3\beta s \qquad (22)$$

Καθώς το $\psi(s)$ αναλύεται σε παράγοντες, εξετάζεται κάθε παράγων χωριστά.
Ο παράγων s έχει ρίζα επάνω στο φανταστικό άξονα.
Για τον παράγοντα $s^3+(1+2\beta)s^2+(2+2\beta)s+3\beta$ εφαρμόζεται το κριτήριο Routh.

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 2+2\beta \\
s^2 & 1+2\beta & 3\beta \\
s & \dfrac{(1+2\beta)(2+2\beta)-3\beta}{1+2\beta}=\dfrac{4\beta^2+\beta+2}{1+2\beta} & 0 \\
s^0 & 3\beta &
\end{array}$$

Για να μην έχει η περιγραφή του συστήματος πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο, πρέπει

$$\begin{aligned} &1+2\beta>0 \\ &4\beta^2+\beta+2>0 \\ &\beta>0 \end{aligned} \qquad (23)$$

Οι ανισότητες (23) συναληθεύουν για $\beta>0$. Καθώς δεν μηδενίζεται γραμμή της διάταξης Routh, δεν υπάρχουν ρίζες του πολυωνύμου αυτού στο φανταστικό άξονα. Ετσι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μία ρίζα επάνω στο φανταστικό άξονα και η περιγραφή θα είναι ευσταθής αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής.
Εάν $\beta=0$, δηλαδή $\alpha=\pm\infty$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γίνεται

$$\psi(s)=s^4+s^3+2s^2=s^2(s^2+s+2) \qquad (24)$$

και εμφανίζει διπλ'η ρίζα επάνω στο φανταστικό άξονα. Η περιγραφή του συστήματος θα είναι ευσταθής εάν στην ιδιοτιμή s=0 της μήτρας A υπάρχουν δύο ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Ο βαθμός της sI-A=0I-A είναι

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s+\beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta & s+\beta & 0 & -1 \\ 0 & & s & -1 \\ 0 & & 1 & s+1 \end{bmatrix}_{s=0,\beta=0}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=2=n-2 \qquad (25)$$

όπου 2 είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής s=0. Επομένως η περιγραφή του συστήματος για την περίπτωση αυτή θα είναι ευσταθής.

4.

Εάν α=1, από τη Σχέση (2) λαμβάνεται

$$v_{C_1}(t)+v_{C_2}(t)-E=0 \tag{26}$$

και επομένως οι τάσεις των πυκνωτών C1 και C2 δεν είναι ανεξάρτητες. Επιλέγοντας την $v_{C_2}(t)$ σαν μεταβλητή της περιγραφής του συστήματος, επιλύουμε ως προς $v_{C_1}(t)$ τη Σχέση (26) και αντικαθιστώντας στην (13), λαμβάνεται

$$C_2\frac{dv_{C_2}}{dt}=C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}+C_3\frac{dv_{C_3}}{dt}=C_1\frac{d(E-v_{C_2})}{dt}+i_L=-C_1\frac{dv_{C_2}}{dt}+i_L+C_1\frac{dE}{dt} \tag{27}$$

ή ισοδύναμα

$$(C_2+C_1)\frac{dv_{C_2}}{dt}=i_L+C_1\frac{dE}{dt} \tag{28}$$

Οι Σχέσεις (10), (12) και (28) που περιγράφουν το σύστημα, για μοναδιαίες τιμές των στοιχείων γράφονται σε μητρωική μορφή ως εξής.

$$\underline{\dot{x}}=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C_2}(t) \\ v_{C_3}(t) \\ i_L \end{bmatrix}=A\underline{x}+Bu+B_1\frac{dE}{dt}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C_2}(t) \\ v_{C_3}(t) \\ i_L \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}E+\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{dE}{dt} \tag{29}$$

$$y=C\underline{x}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C_2}(t) \\ v_{C_3}(t) \\ i_L \end{bmatrix}$$

Για τη μετατροπή των εξισώσεων αυτών σε εξισώσεις καταστάσεως πρέπει να απαλειφεί ο όρος dE/dt από την πρώτη μητρωική εξίσωση. Αυτό επιτυγχάνεται με τη λήψη του διανύσματος καταστάσεως ξ όπως στην ακόλουθη σχέση

$$\underline{x}=\xi+B_1E \tag{30}$$

Οι εξισώσεις καταστάσεως προκύπτουν

$$\underline{\xi}=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C_2}(t)\text{-}0.5E \\ v_{C_3}(t) \\ i_L \end{bmatrix}=A\underline{\xi}+(B-AB_1)u=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C_2}(t)\text{-}0.5E \\ v_{C_3}(t) \\ i_L \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}E \tag{31}$$

$$y=\hat{C}\underline{\xi}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C_2}(t)\text{-}0.5E \\ v_{C_3}(t) \\ i_L \end{bmatrix}$$

Αξίζει να σχολιαστεί ότι για την ανωτέρω τιμή του α η τάξη της περιγραφής του συστήματος μειώνεται. Αυτό οφείλεται στη δημιουργία ενός βρόχου με μόνο πυκνωτές και πηγές τάσης (C_1,E). Αυτό έ[illegible] σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση του όρου dE/dt στις εξισώσεις εξέλιξης του διανύσματος κ[illegible]στάσεως, για την αποφυγή του οποίου απαιτείται μετασχηματισμός του διανύ[illegible]ατος καταστάσεων σύμφωνα με τη Σχέση (30).