Μάθημα: Θεωρία Δικτύων

Ανάλυση Ευσταθείας

Κων/νος Τζαφέστας

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου & Ρομποτικής
Σχολή Ηλεκτρ. Μηχ/κών & Μηχ/κών Υπολ., Ε.Μ.Π.

Τηλ.: (210) 772-3687 (Κτήριο Ηλεκτρ., Γραφείο 21.36)
E-mail: ktzaf@softlab.ntua.gr
Web: http://www.softlab.ntua.gr/~ktzaf/

Ανάλυση Ευσταθείας Γραμμικών Κυκλωμάτων

Ορισμοί Ευσταθείας (1)

Α. *Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης* (ΑΜΚ) /
Περιγραφή Συστήματος Εισόδου-Εξόδου :

Α1. Κρουστική Απόκριση / Συνάρτηση μεταφοράς

Α2. Κριτήριο Φραγμένη Είσοδος – Φραγμένη Έξοδος (Φ.Ε.Φ.Ε.)

Β. *Απόκριση Μηδενικής Εισόδου* (ΑΜΕ, Ελεύθερη Απόκριση) –
(Ασυμπτωτική) *Ευστάθεια κατά Lyapunov*

Β1. Περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης

Β2. Περιγραφή Εισόδου-Εξόδου

Ορισμοί Ευσταθείας (2)

Α- *Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης* (ΑΜΚ) (αρχικές συνθήκες = 0)

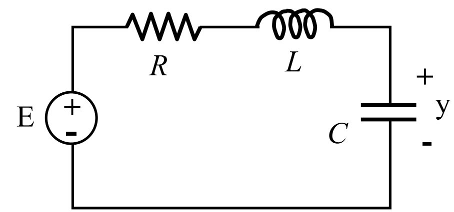
<u>Ορισμός Α-1</u> (κρουστική απόκριση)

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι <u>*ασυμπτωτικά ευσταθές*</u> εαν η <u>*κρουστική απόκριση*</u> ικανοποιεί:

$$\int_0^{\infty} |h(t)| \cdot dt < \infty$$

ή: $\exists A < \infty \;\; (A > 0): \;\; \int_0^{\infty} |h(t)| \cdot dt \leq A$

<u>Παράδειγμα Π-1:</u> RLC κύκλωμα (2ης τάξης, με ζ<1)



$$\boxed{H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}}$$: συνάρτηση μεταφοράς

$$h(t) = |A| \cdot e^{-\sigma t} \cdot \sin(\omega_d t + \phi)$$: κρουστική απόκριση

όπου: $\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \zeta\omega_0 \quad \text{και} \quad \omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \\ A = \omega_0 \big/ \sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{και} \quad \varphi = 0 \end{array} \right\}$

$$\left(\begin{array}{c} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ 2\zeta\omega_0 = \dfrac{R}{L} \Rightarrow \zeta = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{array} \right)$$

Ορισμοί Ευσταθείας (3)

Παράδειγμα Π-1 (συνέχεια):

$$\int_0^\infty |h(t)| \cdot dt = \int_0^\infty \left| |A| \cdot e^{-\sigma t} \cdot \sin(\omega_d t + \phi) \right| \cdot dt = |A| \int_0^\infty \left| e^{-\sigma t} \right| \cdot |\sin(\omega_d t + \phi)| \cdot dt \le \frac{|A|}{\sigma} < \infty$$

Ο ορισμός (A-1) της ασυμπτωτικής ευσταθείας μέσω της κρουστικής απόκρισης →

Έστω είσοδος: $|u(t)| \le U, \quad \forall t \qquad (\Leftrightarrow \textit{φραγμένη είσοδος})$

Τότε: $$|y(t)| = \left| \underbrace{\int_0^t h(\tau) \cdot u(t-\tau) \cdot d\tau}_{\text{συνέλιξη: } h(t) * u(t)} \right| \le \int_0^t |h(\tau)| \cdot |u(t-\tau)| \cdot d\tau$$

$$\le U \cdot \int_0^t |h(\tau)| \cdot d\tau \le U \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad \textit{φραγμένη έξοδος}$$

Ορισμοί Ευσταθείας (4)

<u>Ορισμός Α-2</u> (Φ.Ε.Φ.Ε) (BIBO stability)
Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι <u>*ασυμπτωτικά ευσταθές*</u> εαν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδος είναι επίσης φραγμένη.

$$\exists B_U < \infty : |u(t)| \leq B_U ,\ \forall t \quad \Rightarrow \quad \exists B_Y < \infty : |y(t)| \leq B_Y ,\ \forall t$$

<u>Μη ασυμπτωτικά ευσταθές</u> σύστημα:

$$\int_0^\infty |h(t)| \cdot dt \quad \text{όχι φραγμένο, δηλαδή:} \quad \forall A > 0, \exists T > 0 \, (T < \infty) : \int_0^T |h(t)| \cdot dt > A$$

Αντίστοιχα: υπάρχει $u(t)$ φραγμένο $\Rightarrow$ $y(t)$ όχι φραγμένο

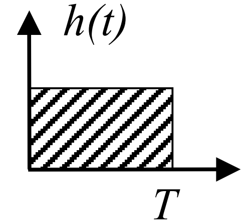
Ορισμοί Ευσταθείας (5)

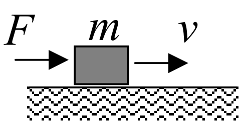
<u>Ορισμός Α-3</u> (Οριακή ευστάθεια)
Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι *<u>οριακά ευσταθές</u>* εαν Δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, αλλά ωστόσο ισχύει:

$$\exists A,B<\infty \ \ (A,B>0): \ \int_0^T |h(t)|\cdot dt \le A+BT, \ \forall T>0$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Π.χ.-1: Ολοκληρωτής $H(s)=\frac{1}{s}, \quad h(t)=1 \ \Rightarrow \ \int_0^T h(t)dt = T$

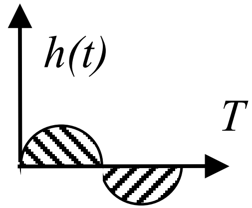


π.χ.: 

$$\frac{v(s)}{F(s)}=\frac{1}{m\cdot s}$$ (όταν τριβή b=0)

Οριακά ευσταθές!

Π.χ.-2: Σύστημα 2ης τάξης χωρίς απόσβεση (undamped), ζ=0



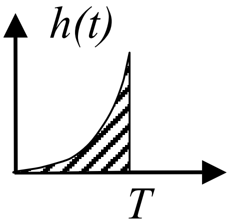
$$H(s)=\frac{A}{s^2+\omega_0^2} \Rightarrow h(t)=(\frac{A}{\omega_0})\sin(\omega_0 t) \ \ \Rightarrow \int_0^T |h(t)|dt \le (\frac{|A|}{\omega_0})T$$

Ορισμοί Ευσταθείας (6)

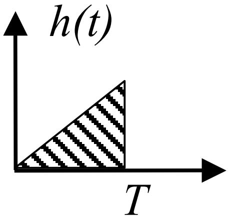
<u>Ορισμός Α-4</u> (Ασταθές)
Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι *<u>ασταθές</u>* εαν Δεν είναι <u>ούτε</u> ασυμπτωτικά ευσταθές, <u>ούτε</u> οριακά ευσταθές :

<u>Παραδείγματα:</u>

Π.χ.-1: πόλος p με Re(p)>0, π.χ. $H(s) = \dfrac{1}{s-\theta} + \cdots \;\Rightarrow\; h(t) = e^{\theta t} + \cdots$



Π.χ.-2: δύο ολοκληρωτές εν σειρά $H(s) = \dfrac{1}{s^2} \;\Rightarrow\; h(t) = t$



$$\Rightarrow \int_0^T |h(t)|dt = \int_0^T t dt = \frac{T^2}{2}$$

Ασταθές!

Ορισμοί Ευσταθείας (7)

Β- *Απόκριση Μηδενικής Εισόδου* (ΑΜΕ) (είσοδος = 0 → $y_{zi}(t)$)
Ευστάθεια κατά Lyapunov

(1) Περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης

Γενικά για (μη-γραμμικό) χρονικά αμετάβλητο σύστημα: $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}, u)$

✓ Έστω αυτόνομο σύστημα (δηλ. είσοδος = 0): $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x})$

✓ Κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_s$: $f(\underline{x}_s) = \underline{0}$

<u>Ορισμός Β-1</u> (Ευστάθεια κατά Lyapunov)

Μια κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_s$ (ενός αυτόνομου δυναμικού) συστήματος είναι <u>*ευσταθής (κατά Lyapunov)*</u> εαν:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \left\|\underline{x}(0) - \underline{x}_s\right\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left\|\underline{x}(t) - \underline{x}_s\right\| < \varepsilon\ \forall t > 0$$

<u>Ερμηνεία:</u> εαν η κατάσταση ισορροπίας διαταραχθεί, η κίνηση του διανύσματος κατάστασης θα παραμείνει μέσα σε μια περιοχή της κατάστασης ισορροπίας (το δε μέγεθος της περιοχής αυτής, την οποία μπορούμε να κάνουμε όσο «μικρή» θέλουμε, εξαρτάται από το μέγεθος της διαταραχής)

Ορισμοί Ευσταθείας (8)

Ορισμός Β-2 (*Ασυμπτωτική Ευστάθεια κατά Lyapunov*)
Μια κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_s$ (ενός αυτόνομου δυναμικού) συστήματος είναι *ασυμπτωτικά ευσταθής (κατά Lyapunov)* εαν:

(α) είναι ευσταθής

(β) $\exists \delta_s > 0: \ \|\underline{x}(0) - \underline{x}_s\| < \delta_s \ \Rightarrow \ \underline{x}(t) \xrightarrow{t \to \infty} \underline{x}_s$

Εαν $\delta_s \rightarrow +\infty$, τότε «ολική» ασυμπτωτική ευστάθεια (globally asymptotically stable)

Θεώρημα: Έστω αυτόνομο σύστημα $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}), \quad f(\underline{0}) = \underline{0}$
Εαν υπάρχει *συνάρτηση Lyapunov* $V(\underline{x})$:

(i) $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$: συνεχής $\forall i$, (ii) $V(\underline{x})>0$ για $\|\underline{x}\|>0$, και (iii) $V(\underline{x})=0$, όταν $\|\underline{x}\|=0$

τότε η κατάσταση ισορροπίας ($\underline{x}_s=\underline{0}$) είναι:

- *ευσταθής* εαν $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$ για περιοχή $\{\underline{x}\}$ του χώρου κατάστασης: $V(\underline{x})<k$
- *ασυμπτ. ευσταθής* εαν $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ (για περιοχή του χώρου κατάστασης…)
- *ολικά ασυμπτ. ευσταθής* εαν $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ (για όλο το χώρο κατάστασης: $\|\underline{x}\|>0$)

Ορισμοί Ευσταθείας (9)

Εφαρμογή Θεωρήματος ευσταθείας κατά Lyapunov

Έστω Γ.Χ.Α σύστημα $\underline{\dot{x}} = A \cdot \underline{x}$

Ορίζουμε συνάρτηση $V(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot Q \cdot \underline{x} > 0$ (Q: θετικά ορισμένημήτρα $n\times n$)

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T \cdot Q \cdot x + x^T \cdot Q \cdot \dot{x} = x^T \cdot \left(A^T Q + QA\right) \cdot x$$

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει $Q>0$: $A^T Q + QA = -I$, και άρα $\dot{V} < 0, \quad \forall x$
εαν για κάθε λ_i ιδιοτιμή της μήτρας A, ισχύει: $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$

Ορισμοί Ευσταθείας (10)

(2) <u>Περιγραφή Εισόδου-Εξόδου *(για ΓΧΑ σύστημα)*</u>

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_0 u(t)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\underbrace{\frac{b(s)}{\psi(s)}}_{H(s)} \cdot U(s)}_{Y_{\mathrm{zs}}(s)} + \underbrace{\frac{\beta(s)}{\psi(s)}}_{Y_{\mathrm{zi}}(s)} \qquad (\text{όπου } \psi(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 \;)$$

<u>Ορισμός Β-3</u> (*Ευστάθεια κατά Lyapunov*, $u(t)=0$, δηλ. *ελεύθερη απόκριση*)

- <u>*Ασυμπτ. ευσταθές:*</u> $\forall y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} |y_{zi}(t)| = 0$
  (αρχικές συνθήκες)

- <u>*(Οριακά) ευσταθές:*</u> $\forall y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0) \Rightarrow \exists M > 0 : |y_{zi}(t)| < M, \forall t > 0$
  (αρχικές συνθήκες)

- <u>*Ασταθές:*</u> $\exists y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} |y_{zi}(t)| = \infty$
  (υπάρχουν αρχικές συνθήκες)

Κριτήρια Ευσταθείας (1)

Α.Μ.Κ.

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός ΓΧΑ συστήματος

$$H(s) = \frac{b(s)}{\psi(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y_{zs}(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$$

και $\int_0^\infty |h(t)| \cdot dt < \infty$

Α.Μ.Ε.

Απόκριση μηδενικής εισόδου ($u(t)$=0, ελέυθερη απόκριση)

$$Y_{zi}(s) = \mathcal{L}\{y_{zi}(t)\} = \frac{\beta(s)}{\psi(s)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\{Y_{zi}(s)\} = y_{zi}(t)$$

και $\lim_{t\to\infty} |y_{zi}(t)| = 0$

$H(s)$: έστω $\deg(b(s)) \leq \deg(\psi(s))$ και

έστω π.χ. $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ απλοί πόλοι της $H(s)$ (ρίζες της $\psi(s)$)

$$H(s) = A_0 + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n} \quad \Rightarrow \quad h(t) = A_0\delta(t) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty |h(t)| \cdot dt \leq |A_0| + \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \left|A_k e^{p_k t}\right| dt = |A_0| + \sum_{k=1}^n |A_k| \int_0^\infty e^{\sigma_k t} dt = |A_0| + \sum_{k=1}^n \left|\frac{A_k}{\sigma_k}\right| < \infty$$

(δεδομένου ότι ισχύει: $\left|e^{p_k t}\right| = \left|e^{\sigma_k t}\right| \cdot \left|e^{j\omega_k t}\right| = e^{\sigma_k t}$)

(εαν και μόνο εαν σ_k=Re(p_k)<0, για κάθε k)

Κριτήρια Ευσταθείας (2)

Κριτήριο με πόλους

Ένα Γ.Χ.Α. Σύστημα με χ.π. $\psi(s)$, και πόλους p_k (k=1,…,n) (i.e.: $\psi(p_k)=0$)

- *Ασυμπτ. Ευσταθές* ⇔ $\mathrm{Re}(p_k)<0$, για κάθε k
- *(Οριακά) Ευσταθές* ⇔ $\mathrm{Re}(p_k)\leq 0$, για κάθε k
  και για κάθε πόλο p: $\mathrm{Re}(p)=0$, είτε $m(p)=1$, είτε (εαν $m(p)>1$) $m(p)=\gamma(p)$
  (όπου: $m(.)$=αλγεβρική πολλαπλότητα, και $\gamma(p)$=γεωμετρική πολλαπλότητα)
  $\gamma(p)$: #ανεξ. ιδιοδιανυσμάτων v (της μήτρας Α του συστήματος) ←→ ιδιοτιμή p (ήτοι: $A.v=p.v$)
- *Ασταθές* ⇔ Υπάρχει πόλος p_k: $\mathrm{Re}(p_k)>0$

Παράδειγμα (Γ.Χ.Α. Σύστημα 2ης τάξης)

$$\ddot{y}(t)+(2a)\dot{y}(t)+\omega_0^2 y(t)=u(t) \quad \overset{\mathcal{L}(.)}{\Rightarrow} \quad Y(s)=\underbrace{\frac{1}{s^2+2as+\omega_0^2}}_{H(s)}\cdot U(s)+\underbrace{\frac{(2a+s)\,y(0)+\dot{y}(0)}{s^2+2as+\omega_0^2}}_{Y_{zi}(s)}$$

$$\left[\ \mathcal{L}(\ddot{y})=s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)\ \right]$$

Κριτήρια Ευσταθείας (3)

<u>Παράδειγμα</u> (Σύστημα 2ης τάξης) (συνέχεια...)

$$H(s)=\frac{1}{s^2+2as+\omega_0^2}$$

$p_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2-\omega_0^2}$: πόλοι

(όπου: $\zeta=(a/\omega_0)$ ή $a=\zeta\omega_0$)

- *Ασυμπτ. Ευσταθές* όταν *a*>0 (*ζ*>0) $\begin{cases} a\geq\omega_0>0 \quad (\text{i.e. } \zeta\geq 1) \;\Rightarrow\; p_{1,2}\in\mathbb{R}\wedge p_{1,2}<0 \\ 0<a<\omega_0 \quad (\text{i.e. } 0<\zeta<1) \;\Rightarrow\; p_{1,2}\in\mathbb{C}\wedge \operatorname{Re}(p_{1,2})<0 \end{cases}$
- *Οριακά Ευσταθές* όταν *a*=0 (*ζ*=0) $\{\; a=0 \quad (\text{i.e. } \zeta=0) \;\Rightarrow\; p_{1,2}\in\mathbb{I} \;\text{ i.e. } \operatorname{Re}(p_{1,2})=0$
- *Ασταθές* όταν *a*<0 (*ζ*<0) $\{\; a<0 \quad (\text{i.e. } \zeta<0) \;\Rightarrow\; p_{1,2}\in\mathbb{C}\wedge \operatorname{Re}(p_{1,2})>0$

Κριτήρια Ευσταθείας (4)

Κριτήριο Ευσταθείας Routh

Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος

$$\psi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Αναγκαία συνθήκη ασυμπτωτικής ευστάθειας (Θεώρημα Stobola): $a_i > 0 \ \forall\, i$.

Δηλαδή: Εαν σύστημα ασυμπτ. ευσταθές (i.e.: $\mathrm{Re}(p_k)<0$ για κάθε k) $\Rightarrow$ $a_i > 0$ για κάθε i

Routh (1874) – Hurwitz (1895)

$$\left.\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & 0 & \varnothing & & \\
s^0 & g_1 & 0 & & &
\end{array}\right\}$$

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad \ldots$$

$$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad \ldots$$

$\ldots$

Κριτήρια Ευσταθείας (5)

Κριτήριο Ευσταθείας Routh

αριθμός των ριζών p_k: $\mathrm{Re}(p_k)>0$ = #μεταβολών προσήμου στη 1η στήλη

Σύστημα *ασυμπτωτικά ευσταθές* εαν και μόνο εαν όλοι οι συντελεστές a_i του πολυωνύμου a_i είναι ομόσημοι (π.χ. $a_i>0 \;\; \forall\, i$) (όχι μηδενικά!) και όλοι οι όροι της 1ης στήλης στη διάταξη Routh είναι «ομόσημοι» (π.χ. $a_n, a_{n-1}, b_1, c_1, \ldots, f_1, g_1 > 0$)

Ειδικές Περιπτώσεις:

(1) Ένα στοιχείο της 1ης στήλης μηδενικό → συνεχίζουμε την ανάλυση ευσταθείας με κάποιο ε→0+ (ή 0-) για να αποφανθούμε περί της ύπαρξης ριζών του πολυωνύμου στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο ...

(2) Μία ολόκληρη γραμμή (π.χ. η s^{2i+1}) της διάταξης μηδενίζεται
→ εαν «όχι ασταθές», τότε οριακά ευσταθές («ταλαντωτής»), και η συχνότητα ταλάντωσης υπολογίζεται από το βοηθητικό πολυώνυμο της γραμμής s^{2i+2} ...